Trägheitsschwingungen im Ozean und in der Atmosphäre

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
genehmigt von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Friedrich Defant
aus Wien

Tag der mündlichen Prüfung: 12. März 1940
Tag der Promotion: 18. Oktober 1940

Druck: Buchdruckerei F. Mitzlaff, Rudolstadt / Thür.

N 53

Referenten: Dr. Ertel

Professor Dr. Wüst

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

I. Einleitung. Trägheitsbewegung auf der rotierenden Erde 5

II. Einfache Trägheitsschwankung als Begleiterscheinung eines stationären Stromes 7

III. Fortschreitende Trägheitswellen im Wasser und in der Luft 12

IV. Trägheitswellen mit Berücksichtigung der Reibung 17

V. Ozeanographische und atmosphärische Erscheinungen, bei denen mit dem Auftreten von Trägheitsbewegungen zu rechnen ist 22

1. Triftstrom bei unvermitteltem Windeinsatz 23
2. Triftstrom bei allmählich einsetzendem bzw. aussetzendem Windeinfluß 25
3. Gradientstrom bei unvermittelt bzw. allmählich einsetzendem Druckgradienten im Ozean 27
4. Gradientwind bei unvermittelt bzw. allmählich einsetzendem Druckgradienten 31

VI. Trägheitsbewegungen bei Meeresströmungen in den Beobachtungen . . . 39

VII. Trägheitsbewegungen in den Luftströmungen nach den Beobachtungen . 45

VIII. Zusammenfassung 64

Literaturverzeichnis 66

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548011_0107

I. EINLEITUNG.
TRÄGHEITSBEWEGUNG AUF DER ROTIERENDEN ERDE.

Alle Bewegungen in den Medien, die die Luftmassen der Atmosphäre oder die Wassermassen der Ozeane bilden, beziehen wir aus praktischen Gründen auf ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem, das demnach die tägliche Rotation derselben mitmacht. Wollen wir die Grundgleichungen der Galilei-Newton schen Dynamik für diese Bewegungen beibehalten, dann muß man neben der stets vorhandenen, konservativen Kraft der Erdschwere und den inneren Kräften (Druckkräften) auch die aus der Zentrifugalkraft der Rotationsbewegung des bewegten Systems resultierende „ablenkende Kraft der Erddrehung" oder die sogenannte Corioliskraft berücksichtigen. In Vektordarstellung ist diese scheinbare Kraft durch das Produkt $\mathfrak{v} \times 2\,\omega$ gegeben, wenn $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor und ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung bedeuten. Den Eigenschaften des Vektorproduktes entsprechend wirkt diese Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit, demnach senkrecht zur Tangente der Bewegungsbahn. Außerdem wirkt sie senkrecht zur Erdachse oder, was dasselbe ist, in der Richtung der Ebene des Äquators. Nur die Projektion der Bewegung auf diese Äquatorebene wird durch sie beeinflußt, indem sie diese Bahn antizyklonisch zu krümmen sucht. Auf diese Weise ergibt sich, daß jede Bewegung auf der rotierenden Erde auf der Nordhemisphäre einer Krümmung nach rechts, auf der Südhemisphäre einer nach links unterliegt, allgemein eine Ablenkung der Bewegungsrichtung cum sole eintritt. Liegt im speziellen Fall der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in der Horizontalebene eines Punktes der Erdoberfläche in der geographischen Breite φ, dann ist seine Projektion auf die Äquatorebene $\mathfrak{v} \cdot \sin \varphi$ und die Horizontalkomponente der ablenkenden Kraft $2\,\omega \sin \varphi \cdot \mathrm{v}$. Da sie stets senkrecht zur Richtung der Bewegung wirkt, kann sie keine Änderung des absoluten Wertes der Geschwindigkeit selbst, sondern nur Änderungen in der Richtung der Bewegung bewirken, aber ihr Einfluß auf das schließliche Bild der Bewegung ist deshalb nicht weniger bedeutend.

Die ablenkende Eigenschaft der Corioliskraft hat zur Folge, daß unter alleiniger Wirkung dieser Kraft ein Massenteilchen, das sich mit einer Geschwindigkeit V in einer Horizontalebene bewegt, eine gekrümmte Bahn zurücklegt, deren Krümmungsradius R sich aus der Gleichgewichtsbedingung der auf das Teilchen wirkenden Kräfte ergibt. Diese sind die Zentripetalkraft gegen das Zentrum der Krümmung $\frac{V^2}{R}$ und die ablenkende Kraft der Erd-

rotation $2\omega \cdot V \sin\varphi$. Dies ergibt im Gleichgewicht als Krümmungsradius der Bahn I/1 $R = \frac{V}{2\omega \sin\varphi}$. Bei ungeänderter Geschwindigkeit ist, wenn die geographische Breite durch die Bewegung sich nur unbedeutend ändert, der Krümmungsradius der Bahn konstant, die Bahnkurve selbst ein Kreis, welcher Trägheitskreis genannt wird. Diese Bezeichnung soll daran erinnern, daß bei Relativbewegung auf der rotierenden Erde diese angenäherte Kreisbewegung in gewissem Sinne die geradlinige Trägheitsbewegung bei der absoluten Bewegung ersetzt.

Der Radius des Trägheitskreises ist eine Funktion der geographischen Breite und der Geschwindigkeit und ist in folgender Tab. 1 für verschiedene Werte dieser Größen gegeben. Dabei sind einander entsprechende Einheiten so zu wählen, daß zu den Geschwindigkeiten in mm/sec, cm/sec, m/sec die Radien in den Einheiten Meter, Dekameter, Kilometer gehören.

Tabelle 1.

Radius des Trägheitskreises in Abhängigkeit von V und φ.

V \ φ	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	78,7	39,5	20,1	13,7	10,4	9,0	7,9	7,3	7,0	6,9
2	157,3	79,0	40,1	27,4	21,3	17,9	15,8	14,6	13,9	13,7
3	236,0	118,5	60,2	41,2	31,9	26,9	23,8	21,9	20,9	20,6
4	314,6	158,0	80,2	54,9	42,6	35,8	31,7	29,2	27,8	27,4
5	393,3	197,6	100,3	68,6	53,2	44,8	39,6	36,5	34,8	34,3
6	471,9	237,1	120,3	82,3	63,8	53,7	47,5	43,8	41,7	41,2
7	550,5	276,6	140,4	96,0	74,5	62,6	55,4	51,1	48,6	48,0
8	629,2	316,1	160,4	109,7	85,1	71,6	63,4	58,5	55,6	54,9
9	707,8	355,6	180,5	123,5	95,8	80,5	71,3	65,7	62,5	61,7
10	786,5	395,1	200,5	137,2	106,4	89,5	79,2	73,0	69,5	68,6

Ohne Zweifel müssen die in obigem beschriebenen Trägheitsbewegungen in der Dynamik der Luft- und Wasserhülle der Erde eine bedeutende Rolle spielen. Wissen wir doch, welchen Einfluß die ablenkende Kraft der Erdrotation auf die Luft- und Meeresströmungen hat. Wenn es aber auch bisher nicht gelungen ist, in den Luftströmungen reine Trägheitsbewegungen im einzelnen nachzuweisen, und in den Meeresströmungen sich erst vor kurzem in einigen Fällen das Auftreten derselben bei der Diskussion ozeanographischer Strommessungen unzweifelhaft gezeigt hat, so ist trotzdem aus theoretischen Gründen zu erwarten, daß sie öfters in Erscheinung treten müssen, als man erwarten möchte. In den nachfolgenden Ausführungen sollen zunächst alle Einzelheiten der periodischen Trägheitsbewegungen, die unter verschiedenen äußeren Bedingungen in der Atmosphäre und im Ozean auftreten und sich erhalten können, von der theoretischen Seite her behandelt werden.

Insbesondere mögen einzelne Erscheinungen Erörterung finden, deren Ablauf mit dem Auftreten von Trägheitswellen zwangsläufig verknüpft sein muß und bei denen in der Natur wirklich mit ihrem Auftreten auch gerechnet werden kann. Hierbei ergeben sich auch die Bedingungen, unter denen solche Trägheitsbewegungen in einem solchen Beobachtungsmaterial zu finden sein

werden, vielleicht auch Hinweise, wie solche nachzuweisen sind. In einem zweiten Teil wird dann der Nachweis erbracht, daß in den Registrierungen frei aufgestellter Anemometer periodische Schwankungen in der Windrichtung und in der Windstärke bzw. -geschwindigkeit tatsächlich nicht schwer zu finden sind, die den Bedingungen reiner Trägheitsschwankungen entsprechen und die in Superposition mit anderen periodischen Schwankungen bei länger anhaltendem, gleichförmigem Windstrom scheinbar zu den normalen Erscheinungen gehören. Auch für die Meeresströmungen gilt, soweit die noch spärlichen Beobachtungen, die hier bedeutend schwieriger zu gewinnen sind, einen Nachweis gestatten, dasselbe. Auf jeden Fall im Ozean wie auch in der Atmosphäre ist stets mit dem Auftreten von reinen Trägheitsschwankungen zu rechnen.

II. EINFACHE TRÄGHEITSSCHWANKUNGEN ALS BEGLEITERSCHEINUNG EINER STÖRUNG EINES STATIONÄREN STROMES.

Ein Massenteilchen, das relativ zur rotierenden Erde in Ruhe ist, vollführt in Wirklichkeit eine Bewegung längs eines Breitenkreises mit einer absoluten Winkelgeschwindigkeit, die seinem Abstand von der Erdachse und der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung entspricht. Nach den Bjerknesschen Kriterien*) ist diese Bewegung stabil. Erteilt man einem Teilchen einen störenden Impuls, so gerät es aus seiner Gleichgewichtslage. Beim Verlassen derselben treten aber sogleich Kräfte auf, die es in die frühere Lage zurücktreiben. Diese erreicht es mit einer bestimmten kinetischen Energie, die es nach der entgegengesetzten Richtung aus der eben erreichten Gleichgewichtslage wieder verschiebt. Diese Bewegung wird wieder zur Umkehr gebracht und die Anfangsstörung löst sich in Schwingungen um die ursprüngliche Gleichgewichtslage auf. Ist z. B. in unserem Fall der Störungsimpuls meridional polwärts gerichtet, so nähert sich bei dieser Bewegung das Teilchen der Erdachse und erreicht die höheren Breiten mit einer größeren Rotationsgeschwindigkeit als diesen Breiten entspricht. Der sich dadurch einstellende Überschuß an Zentrifugalkraft erzeugt eine äquatorwärts gerichtete Beschleunigung, die das Teilchen nach Aufbrauch seiner kinetischen Energie des Anfangsimpulses zur Umkehr zwingt. Beim Erreichen des Anfangsbreitenkreises besitzt es aber nun dieselbe kinetische Energie wie beim Anfangsimpuls, aber in der entgegengesetzten Richtung. Nun wiederholt sich auf der anderen Seite der Gleichgewichtslage dasselbe wie früher und der Endeffekt sind Schwingungen um den Ausgangsbreitenkreis.

Zu diesen periodischen Bewegungen in meridionaler Richtung kommen ähnliche periodische Schwankungen der Zonalkomponente. Denn das Teilchen hat in höheren Breiten gegenüber dem Anfangsbreitenkreis einen Überschuß an zonaler Bewegung, in den niedrigeren ein entsprechendes Defizit. Man sieht leicht ein, daß das Teilchen durch diese zonalen Bewegungen beim Überqueren des Gleichgewichtskreises bei polwärts gerichteter Bewegung zu weit zurück, bei äquatorwärts gerichteter aber zu weit voraus steht. Das

*) Siehe z. B. V. Bjerknes u. a., Physikalische Hydrodynamik. Berlin 1933, S. 459.

Zusammenspiel beider Bewegungen ergibt den relativ zur rotierenden Erde antizyklonisch verlaufenden Trägheitskreis. Die exakte Durchführung dieser Überlegungen gibt folgendes.

Die Bewegungsgleichungen für ein Massenteilchen, das sich auf der rotierenden Erde in einer Horizontalebene mit den Geschwindigkeitskomponenten u und v ohne Einfluß äußerer Kräfte und Reibung bewegt, sind, wenn man $2\,\omega \sin \varphi = \lambda$ setzt:

II/1 $$\frac{du}{dt} - \lambda v = 0, \qquad \frac{dv}{dt} + \lambda u = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist offenbar:

II/2 $$\begin{aligned} u &= v_0 \sin \lambda t + u_0 \cos \lambda t \\ v &= v_0 \cos \lambda t - u_0 \sin \lambda t' \end{aligned}$$

worin u_0 und v_0 die Geschwindigkeitskomponenten des Massenteilchens zur Zeit $t = 0$ sind. Um eine Aussage über das Aussehen dieser Bewegung machen zu können, muß man die Bahnkurve des Teilchens ermitteln. Die Integration der Werte in II/2 von der Zeit 0 bis t ergibt, wenn x_0 und y_0 die Anfangskoordinaten zur Zeit $t = 0$ sind:

II/3 $$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{v_0}{\lambda}\,(1 - \cos \lambda t) + \frac{u_0}{\lambda} \sin \lambda t \\ y - y_0 &= -\frac{u_0}{\lambda}\,(1 - \cos \lambda t) + \frac{v_0}{\lambda} \sin \lambda t \end{aligned}.$$

Setzt man $\frac{u_0}{v_0} = \operatorname{tg} \psi$ und $u_0 = c_0 \sin \psi$, $v_0 = c_0 \cos \psi$, so findet man durch Kombination mit den Gleichungen II/2:

II/4 $$\begin{aligned} u &= c_0 \sin (\lambda t + \psi) \qquad & x - x_0 &= \frac{c_0}{\lambda}\,[\cos \psi - \cos (\lambda t + \psi)] \\ & \text{und} & & \\ v &= c_0 \cos (\lambda t + \psi) & y - y_0 &= -\frac{c_0}{\lambda}\,[\sin \psi - \sin (\lambda t + \psi)] \end{aligned}.$$

Eine Bewegung der Form II/4 ist eine reine Trägheitsbewegung. Jede Geschwindigkeitskomponente verläuft periodisch mit der Periode

II/5 $$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{12 \text{ Stunden}}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \text{ Pendeltag}.$$

Diese Periode entspricht der halben Umlaufsdauer der Schwingungsebene eines Foucaultschen Pendels. Bezeichnet man diese Zeit als einen Pendeltag, dann beträgt die Periode der Trägheitsschwingung einen halben Pendeltag. Die Schwingungen beider Geschwindigkeitskomponenten haben die gleiche Amplitude, die Phase der Komponente in der y-Richtung läuft der in der x-Richtung um eine ¼ der Periode voraus.

Quadriert man und addiert man die zweiten Gleichungen II/4, so erhält man:

II/6 $$\left[x - \left(x_0 + \frac{c_0 \cos \psi}{\lambda}\right)\right]^2 + \left[y - \left(y_0 + \frac{c_0 \sin \psi}{\lambda}\right)\right]^2 = \left[\frac{c_0}{\lambda}\right]^2.$$

Das ist die Gleichung des Trägheitskreises, sein Radius ist, wie schon oben angegeben, $\frac{c_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2\omega \sin \varphi}$. Seine Größe kann man für verschiedene Werte von c_0 und φ der Tab. 1 entnehmen.

In folgender Tab. 2 ist die Periode der Trägheitsschwingungen in Abhängigkeit von der geographischen Breite gegeben:

Tabelle 2.

φ:	0	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90
Periode der Trägheitsschwingungen (½ Pendeltag):	∞	138	69	46	35	24	18,7	15,7	13,9	12,8	12,2	12,0

(in Stunden)

Die bisherigen Überlegungen gelten nur solange, als λ und damit auch die geographische Breite konstant angenommen werden, was ja beim Durchlaufen des Trägheitskreises nie genau der Fall sein kann. Da die ablenkende Kraft der Erdrotation mit der geographischen Breite zunimmt, muß in Wirklichkeit die Bahn des Massenteilchens in den polaren Breiten stärker, in den niedrigen Breiten weniger gekrümmt sein. Die exakte Trägheitsbahn ist deshalb in Wirklichkeit kein Kreis, sondern eine trochoidförmige Kurve mit fast kreisförmigen, rasch aufeinanderfolgenden Ösen. Für die meisten Fälle genügt es aber, mit Ausnahme der sehr niedrigen Breiten, die Bahn als kreisförmig anzusehen*).

Bisher ist nur ein materieller Punkt in seiner Bewegung auf der rotierenden Erde betrachtet worden. Handelt es sich um Bewegungen eines flüssigen Mediums, so wirken im allgemeinen in einer Horizontalebene neben der ablenkenden Kraft der Erdrotation die aus der Massenverteilung resultierenden inneren Kräfte, insbesondere die Gradientkraft, die einige Modifikationen bewirkt. An Stelle der Gleichungen II/1 treten jetzt, mit Anwendung der üblichen Bezeichnungen, die Gleichungen:

$$\text{II/7} \qquad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= +\lambda v - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= -\lambda u - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ist das Druckgefälle konstant, so läßt sich das Koordinatensystem stets so drehen, daß $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ wird. Für die beschleunigungsfreie Bewegung $\left(\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0\right)$ ergibt sich ein stationärer Strom, der durch $U_0 = 0$ und $V_0 = \frac{1}{\lambda\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$ bestimmt ist. Das ist bekanntlich der Gradientstrom, bei

*) Die genaue Berücksichtigung der veränderlichen geographischen Breite ist in einer Arbeit von F. J. Wipple, Phil. Mag., Vol. 33, 1917, S. 457, durchgeführt.

dem die Gradientkraft der ablenkenden Kraft der Erdrotation stets das Gleichgewicht hält. Die Gleichungen II/7 sind dann den Gleichungen

II/8 $$\frac{du}{dt} = +\lambda(v - V_0), \quad \frac{dv}{dt} = -\lambda u$$

äquivalent. Eine periodische Lösung dieser Gleichungen für einen Beobachter, der mit der Bewegung mitgeht, ist nun:

II/9 $$\begin{aligned} u &= v_0 \sin \lambda t + u_0 \cos \lambda t &&= c_0 \sin(\lambda t + \psi) \\ v &= v_0 \cos \lambda t - u_0 \sin \lambda t + V_0 &&= c_0 \cos(\lambda t + \psi) + V_0 \end{aligned}$$

wenn man, wie früher $\frac{u_0}{v_0} = \operatorname{tg} \psi$ und $\sqrt{u_0^2 + v_0^2} = c_0$ setzt. Die Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t = 0$ sind jetzt u_0 und $v_0 + V_0$. Es stellen demnach u_0 und v_0 die Störungsimpulse der stationären Bewegung V_0 dar. Ist zur Zeit $t = 0$ der Geschwindigkeitsvektor V, der mit der y-Achse den Winkel α bilden soll, vorhanden, dann erscheint als Störungsbewegung:

II/10 $$\begin{aligned} u &= (V \cos \alpha - V_0) \sin \lambda t + V \sin \alpha \cos \lambda t \\ v &= (V \cos \alpha - V_0) \cos \lambda t - V \sin \alpha \sin \lambda t + V_0 \end{aligned}$$

Die Bewegung setzt sich zusammen aus dem stationären Zustand und einer reinen Trägheitsbewegung. Besonders deutlich wird dies, wenn der Winkel $\alpha = 0$ genommen wird, d. h. die Störung findet nur in der y-Achse statt. Dann ist

II/11 $$\begin{aligned} u &= (V - V_0) \sin \lambda t \\ v &= (V - V_0) \cos \lambda t + V_0 \end{aligned}$$

Man erkennt hier sofort, daß, wenn $V = V_0$, d. h. wenn von Anfang an die vorhandene Bewegung im Medium dem Gradientstrom entspricht, also Gleichgewicht zwischen Druckfeld und Strom besteht, es zu keinen Trägheitsbewegungen kommt. Wenn aber dieses Gleichgewicht gestört wird, dann geht die Differenz des Störungsvektors gegen den stationären Gradientstrom in eine Trägheitsbewegung mit entsprechendem Trägheitskreis über. Schon dieses Ergebnis läßt erwarten, daß, da in der Natur wohl in den seltensten Fällen Druck- und Stromfeld längere Zeit im gegenseitigen Gleichgewicht stehen und Abweichungen davon sich immer wieder einstellen, Trägheitsbewegungen in der Luft und im Meer gar keine seltenen Erscheinungen sein können. Es dürfte eher an der Sammlung und Verarbeitung des meteorologischen und ozeanographischen Materials liegen, daß sie nicht schon längst unzweifelhaft nachgewiesen worden sind.

Trägheitsschwingungen in einem homogenen Meer. In einem homogenen Meer (konstante Dichte ϱ) rühren die Druckkräfte im Innern der Wassermassen allein von einer Schrägstellung der Meeresoberfläche her. Bezeichnet man die Abweichungen der Meeresoberfläche von ihrer Ruhelage mit ξ, dann sind die Bewegungsgleichungen

II/12 $$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= +\lambda v - g \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= -\lambda u - g \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned}$$

Eine stationäre Bewegung ist in einem solchen Fall mit einer entsprechenden Neigung der Meeresoberfläche verbunden, und zwar derart, daß

II/13 $$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{stat} = \frac{\lambda}{g} v^* \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{stat} = -\frac{\lambda}{g} u^*$$ ist.

Außerdem soll zur Zeit $t = 0$, $u = u_0$, $v = v_0$ und $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0$ sein; der Anfangszustand möge demnach sowohl im Stromfeld wie auch in der Neigung der Meeresoberfläche völlig frei sein. Eine allgemeine Lösung der Gleichungen II/12 ergibt dann:

II/14
$$u = u^* + (u_0 - u^*) \cos \lambda t + \left[v_0 - \frac{g}{\lambda}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0\right] \sin \lambda t$$
$$v = v^* + (v_0 - v^*) \cos \lambda t - \left[u_0 + \frac{g}{\lambda}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0\right] \sin \lambda t$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\lambda}{g} v^* + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 - \frac{\lambda}{g} v^*\right] \cos \lambda t - \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 + \frac{\lambda}{g} u^*\right] \sin \lambda t$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\lambda}{g} u^* + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 + \frac{\lambda}{g} u^*\right] \cos \lambda t + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 - \frac{\lambda}{g} v^*\right] \sin \lambda t.$$

Diese Lösung zeigt, daß bei völlig freiem Anfangszustand sowohl das Stromfeld wie auch die Meeresoberfläche allgemeine Trägheitsschwingungen um ihre Gleichgewichtslage ausführen, die aber nicht in allen Punkten in den Amplituden und Phasen den Bedingungen r e i n e r Trägheitswellen entsprechen, denn im Stromfeld sind die Amplituden der entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten nur gleich, wenn $v^* = \frac{g}{\lambda}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0$ und $u^* = -\frac{g}{\lambda}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0$ sind. Dies verlangt aber nach II/14, daß schon im Anfangszustand die Neigung der Meeresoberfläche dem stationären Zustand entspricht; weiterhin ist aber dann nach dem zweiten Gleichungspaar II/14 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ unabhängig von der Zeit, d. h. die Neigung der Meeresoberfläche, die schon zu Anfang dem stationären Zustand entsprach, bleibt unverändert in dieser Lage, und nur das Stromfeld vollführt reine Trägheitsschwingungen. Im allgemeinen Fall sind die Geschwindigkeitskomponenten in ihren Amplituden nicht einander gleich, die Bewegung selbst ist dann nicht mehr kreisförmig, sondern elliptisch. Aber die Amplituden einander entsprechender Glieder der Neigung der Meeresoberfläche sind in allen Fällen gleich, so daß die Schwingungen der Meeresoberfläche stets reine Trägheitsschwingungen sind, d. h. der Fußpunkt der Normalen zur Meeresoberfläche beschreibt in einem halben Pendeltag den Trägheitskreis.

III. FORTSCHREITENDE TRÄGHEITSWELLEN IN WASSER UND LUFT.

Zur Beschreibung der Bewegungen innerhalb einer Wassermasse der Tiefe h und von nicht zu großen horizontalen Dimensionen, so daß die Größe $\lambda = 2\,\omega \sin \varphi$ als konstant angesehen werden kann, dienen die Gleichungen:

III/1
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y}\right).$$

Eine Lösung dieser Gleichungen in der Form einer fortschreitenden Welle längs der x-Achse und mit der Periode der Trägheitsschwankungen $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ kann in folgender Weise angesetzt werden $(i = \sqrt{-1})$:

III/2
$$\xi = C\,e^{-\alpha y + i\lambda\left(t - \frac{x}{\varkappa}\right)}$$
$$u = Ae^{-\alpha y + i\lambda\left(t - \frac{x}{\varkappa}\right)}$$
$$v = Be^{-\alpha y + i\lambda\left(t - \frac{x}{\varkappa}\right)}.$$

Setzt man sie in III/1 ein, dann erhält man, wenn $iA - B = W$ gesetzt wird, aus den Bewegungsgleichungen:

III/3
$$W = i \cdot \frac{g}{\varkappa} C \quad \text{und} \quad W = ig\frac{\alpha}{\lambda} C.$$

Diese Gleichungen legen $\alpha = \frac{\lambda}{\varkappa}$ fest. α stellt somit die Wellenzahl der fortschreitenden Welle dar.

Die Kontinuitätsgleichung liefert Ausdrücke für A und B in Abhängigkeit von C in der Form:

III/4
$$A = \frac{C}{2}\left[\frac{\varkappa^2 + gh}{\varkappa h}\right] \quad \text{und} \quad B = i\frac{C}{2}\left[\frac{\varkappa^2 - gh}{\varkappa h}\right].$$

Setzt man nun $c = \sqrt{gh} = \varkappa\sqrt{1-\varepsilon}$, so wird

$$\frac{gh}{\varkappa^2} = 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\varkappa^2 + gh}{\varkappa^2} = 2 - \varepsilon,$$

und es werden

III/5
$$A = \frac{C}{2}\frac{\varkappa}{h}(2-\varepsilon) \quad \text{und} \quad B = i\frac{C}{2}\frac{\varkappa}{h}\varepsilon,$$

so daß, wenn man nur die reellen Teile berücksichtigt, die Lösung die Form annimmt:

$$u = \frac{C\varkappa}{2h}(2-\varepsilon)\, e^{-\alpha y} \cdot \cos(\lambda t - \alpha x)$$

III/6 $$v = -\frac{C\varkappa}{2h}\varepsilon \quad e^{-\alpha y} \cdot \sin(\lambda t - \alpha x)$$

$$\xi = \quad C e^{-\alpha y} \cos(\lambda t - \alpha x).$$

Die Bewegung, die durch die beiden Geschwindigkeitskomponenten festgelegt wird, ist elliptisch. Das Verhältnis der kleinen zur großen Achse der Stromfigur ergibt sich zu $\psi = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$. Mit der periodischen Schwankung des Stromes ist auch eine periodische Schwankung an der Oberfläche des Meeres, nämlich eine Welle, vorhanden; sie ist durch die dritte Gleichung in III/6 gegeben. Die Wellenbewegung zeigt sowohl in den Stromkomponenten wie auch an der Wasseroberfläche quer zur Fortpflanzungsrichtung eine Abnahme der Amplitude entsprechend einer e-Potenz, und zwar hat jene Seite die kleinere Amplitude, die in bezug auf die Rotation der Erde vorangeht. Die Abnahme in dieser Richtung ist beträchtlich. Denn auf eine Entfernung, die der halben Wellenlänge entspricht, sinkt die Amplitude auf ein Dreiundzwanzigstel ihres maximalen Wertes.

In der Lösung III/6 ist die Größe ε zunächst völlig frei. Der Fall $\varepsilon = 0$ oder $\psi = 0$ liefert

$$u = C\frac{\varkappa}{h} e^{-\alpha y} \cos(\lambda t - \alpha x)$$

III/7 $$v = 0$$

$$\xi = C \quad e^{-\alpha y} \cos(\lambda t - \alpha x).$$

Die Lösung entspricht der Lord Kelvinschen Welle mit Trägheitsperiode und die Form und Fortpflanzung einer freien Welle in einem unendlich langen, schmalen Kanal konstanter Tiefe h. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also gleich jener langer Wellen in einem nicht rotierenden System.

Der Fall $\varepsilon = 1$ und $\psi = 1$ gibt

$$u = \frac{C\varkappa}{2h} e^{-\alpha y} \cos(\lambda t - \alpha x)$$

III/8 $$v = -\frac{C\varkappa}{2h} e^{-\alpha y} \sin(\lambda t - \alpha x)$$

$$\xi = \quad C \quad e^{-\alpha y} \cos(\lambda t - \alpha x).$$

Die fortschreitende Welle ist zu einer reinen Trägheitsbewegung degeneriert und die Wassermassen bewegen sich in einem halben Pendeltag im Trägheitskreis.

Eine Lösung dieser Form ist schon von F. E. Fjedstad in seinen Beiträgen zur Dynamik freier und fortschreitender Gezeitenwellen gegeben worden. Ihre Ableitung erfolgte aber aus einer allgemeinen Lösung durch

einen Grenzübergang von der frei angenommenen Periode zur Periode der Trägheitsbewegung. Die obige Ableitung vermeidet diesen Grenzübergang.

Eine Wellenlösung für Verhältnisse in einer inkompressiblen Atmosphäre kann man aus dem Gleichungssystem III/9 finden.

III/9
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Setzt man für den Druck p den statischen Druck $g\varrho z$ plus dem Störungsdruck $\varrho\bar{p}$*), also $p = g\varrho z + \varrho\bar{p}$, so wird aus III/9:

III/10
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung bleibt dieselbe. Setzt man nun

III/11
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = D, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = R \quad \text{und} \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

so ergeben die ersten zwei Gleichungen III/10 nach entsprechender Zusammenfassung

III/12
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2\right) D = -\triangle\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}\right).$$

Nun ist aber $D = -\frac{\partial w}{\partial z}$ und nach der dritten Gleichung III/10 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t\,\partial z}$, so daß aus III/12 die Beziehung III/13 folgt:

III/13
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \triangle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Da wir Trägheitswellen suchen, setzten wir w als eine periodische Funktion mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ an, etwa in der Form:

III/14
$$w \sim e^{-i\lambda t} \cdot \psi(x, y, z).$$

In III/13 eingesetzt, erhält man als Bedingungsgleichung für ψ

III/15
$$\triangle\psi = 0.$$

*) Zu beachten ist, daß nicht $\bar{p}$ die Dimension eines Druckes hat, sondern die Größe $\varrho\bar{p}$.

Da die Trägheitswellen sich in der x-Richtung fortpflanzen sollen, kann ψ die Form III/16 haben:

III/16 $$\psi = e^{i\alpha x + \beta y}[M \sinh \gamma z + N \cosh \gamma z].$$

Die Gleichung III/15 ergibt dann $\alpha^2 = \beta^2$ und, da die Amplitude der Welle für $y = \infty$ nicht ins Ungemessene anwachsen darf, ist die einzige mögliche Lösung $\beta = -\alpha$.

Die Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich dann in der Form:

III/17 $$w = e^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y}[M \sinh \gamma z + N \cosh \gamma z].$$

Zur Fixierung der noch freien Größen M, N und γ müssen die Randbedingungen herangezogen werden. Am Erdboden $z = 0$ muß die Vertikalbewegung verschwinden. Das ergibt $N = 0$. Außerdem darf für große Höhen die Vertikalgeschwindigkeit nicht unendlich große Werte annehmen. Der einzige mögliche Wert für γ ist aber dann nur $\gamma = 0$. Folglich muß die Bewegung in rein horizontalen Bahnen vor sich gehen und außerdem müssen die Größen D und R in III/11 gleich Null sein.

Setzt man entsprechend den bisherigen Ergebnissen

$$u = A \cdot e^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y}$$
$$v = B \cdot e^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y}$$
$$\bar{p} = C \cdot e^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y},$$

so ergeben $D = R = 0$ die Bedingungsgleichung $A = -iB$ und die zwei oberen Bewegungsgleichungen in III/10 das Endergebnis:

III/18
$$u = -iBe^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y}$$
$$v = +\ Be^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y}$$
$$\bar{p} = -i\frac{2\lambda}{\alpha} \cdot Be^{i(\alpha x - \lambda t) - \alpha y}.$$

Der reelle Teil davon ist:

III/19
$$u = Be^{-\alpha y} \sin(\alpha x - \lambda t)$$
$$v = Be^{-\alpha y} \cos(\alpha x - \lambda t)$$
$$\varrho \bar{p} = \frac{2\varrho\lambda}{\alpha} Be^{-\alpha y} \sin(\alpha x - \lambda t).$$

Wir erkennen in dieser Lösung die charakteristischen Merkmale einer reinen Trägheitsbewegung: gleiche Amplituden und ein Phasenunterschied von 90 Grad in den Geschwindigkeitskomponenten. Die Lösung ist ähnlich derjenigen, die wir oben für eine ausgedehnte Wassermasse gegeben haben. Der Amplitudenabfall quer zur Fortpflanzungsrichtung ist derselbe wie dort. In III/19 ist auch eine periodische Störung in der Druckverteilung enthalten. Die Amplitude derselben beträgt $A_p = \frac{2\lambda}{\alpha} \cdot \varrho \cdot B$; ihre Phase ist gleich derjenigen der Komponente u. Um uns über die Größenordnung dieser Druck-

welle zu orientieren, können wir für $\varrho \sim 10^{-3}$ gcm^{-3}, $\lambda \sim 10^{-4}$ sec^{-1}, B = 1 msec^{-1} = 100 cm sec^{-1} und $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ setzen und erhalten

$$A_p = 3{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot L \,\delta \text{yn cm}^{-2} = 3{,}25 \cdot 10^{-9} \cdot L \text{ mbar}.$$

Wie die Beobachtungen zeigen, ist die gewählte Amplitude in B den Beobachtungen entsprechend; außerdem ergeben diese ein A_p von der Größenordnung 0,3—0,6 mbar, so daß die Größenordnung der Wellenlänge der Trägheitswellen zu 1000—2000 km resultiert. Diese Werte liegen durchaus im Bereich der Möglichkeit.

Eine wesentlich anders geartete Ableitung einer derartigen Trägheitsbewegung hat H. S o l b e r g in seiner umfassenden Arbeit: Integration der atmosphärischen Störungsgleichungen, erster Teil, S. 107 u. ff., gegeben. Bei ihm ist eine Wellenstörung einer stationären Grundströmung U in der x-Richtung überlagert, so daß an Stelle der Gleichungen III/9 die Gleichungen III/20 treten:

III/20
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) u - \lambda v &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) v + \lambda u &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) w &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Er gelangt zu einer periodischen Wellenstörung in der Form:

III/21
$$\begin{aligned}
u &= \; iA \cdot e^{i(\alpha x - \beta t) - \alpha y} \\
v &= -A \cdot e^{i(\alpha x - \beta t) - \alpha y} \\
p &= \varrho i \frac{\beta - \alpha U + \lambda}{\alpha} \cdot A e^{i(\alpha x - \beta t) - \alpha y}.
\end{aligned}$$

Sie geht für U = 0 und $\beta = \lambda$ in unsere Lösung III/18 über. Als Frequenzgleichung erscheint jetzt die Beziehung

$$\sqrt{\frac{\beta - \alpha U - \lambda}{\beta - \alpha U + \lambda}}\,[(\beta - \alpha U)^2 + \lambda\beta] = 0.$$

Die erste Wurzel $\beta - \alpha U = \lambda$ stellt wieder die reine Trägheitsbewegung dar und ist mit U = 0 identisch mit der obigen Lösung. Die zweite Wurzel ist

$$\beta - \alpha U = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \alpha U \lambda}.$$

Diese stellt ebenfalls eine Art von Trägheitsbewegung dar. Da α reell und positiv ist und $\alpha U < 0$, weil das Koordinatensystem so gewählt wurde, daß der Neigungswinkel der Oberfläche mit dem Boden im ersten Quadranten liegt, ist der Radikant der Wurzel immer positiv. Man erhält also zwei reelle Wurzeln, die aber von λ verschieden sind. Sie stellen demnach keine r e i n e n Trägheitsbewegungen mehr dar.

IV. TRÄGHEITSWELLEN MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER REIBUNG.

Der einfachste Ansatz für eine die Bewegung verzögernde Reibungskraft ist die Annahme, daß die Reibungskraft proportional der Geschwindigkeit gesetzt wird (G u l d b e r g - M o h n sches Reibungsglied). Für ein Massenteilchen, das sich auf der rotierenden Erde unter Ausschluß äußerer Kräfte in horizontaler Bahn bewegt, lauten die Bewegungsgleichungen:

IV/1
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda v - \varkappa u$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\lambda u - \varkappa v,$$

worin $\lambda = 2\,\omega \sin\varphi$ und $\varkappa$ die Reibungskonstante bedeuten. Als Lösung erhält man unter der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$, $u = a$ ist,

IV/2
$$u = a e^{(i\lambda - \varkappa)t}$$
$$v = i a e^{(i\lambda - \varkappa)t},$$

deren reeller Teil

IV/3
$$u = a e^{-\varkappa t} \cos \lambda t$$
$$v = -a e^{-\varkappa t} \sin \lambda t \qquad \text{ist.}$$

Diese Gleichungen stellen eine Trägheitsbewegung im Trägheitskreis, aber mit einer nach einer e-Potenz abnehmenden Amplitude dar, so daß die Bahn des Massenteilchens nun einer Spirale entspricht. Diese Einwirkung der Reibung war vorauszusehen; denn unter ihrem Einfluß wird aus einer Schwingung konstanter Amplitude eine gedämpfte Schwingung, die allmählich erlischt.

Eine den wirklichen Verhältnissen viel besser entsprechende Berücksichtigung der Reibung stellt bei einem bewegten Medium der T a y l o r sche Reibungsansatz dar, bei dem im molekularen Reibungsterm zur Erfassung der Wirkung der ungeordneten Turbulenzbewegung der gewöhnliche molekulare Reibungskoeffizient durch den virtuellen Reibungskoeffizienten (nach W. S c h m i d t , „Austauschkoeffizient") ersetzt wird.

Suchen wir eine periodische Trägheitsbewegung einer Wassermasse von der Höhe h über dem ebenen Boden und bezeichnen wir mit ξ die Abweichung der Wasseroberfläche von ihrer Ruhelage und mit ν den virtuellen Reibungskoeffizienten, so müssen wir von den Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung ausgehen:

IV/4
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz.$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u = -g\frac{\partial \xi}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Ein geeigneter Lösungsansatz ist in IV/5 gegeben:

IV/5
$$u = Ue^{-\mu x - \alpha y + i\lambda\left(t - \frac{x}{\varkappa}\right)}$$
$$v = Ve^{-\mu x - \alpha y + i\lambda\left(t - \frac{x}{\varkappa}\right)}$$
$$\xi = Ce^{-\mu x - \alpha y + i\lambda\left(t - \frac{x}{\varkappa}\right)}.$$

Hierin sind die Amplituden U und V nur Funktionen der Wasserhöhe z über der Bodenfläche und C eine Konstante.

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

IV/6
$$M = \left(\mu + \frac{\lambda}{\varkappa} i\right) gC \qquad N = \alpha g C \qquad M + iN = G = \left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right)\right] gC$$

$$\varrho = \beta(1+i) = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}(1+i)$$
$$\frac{\lambda i}{\nu \varrho^2} - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\nu\varrho^2} = -\frac{i}{4\lambda}$$
$$F = \frac{G}{2\nu} - \frac{M}{\nu} = -\frac{gC}{2\nu}\left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \alpha\right)\right].$$

Die Beziehungen IV/5 in die Gleichungen IV/4 eingesetzt, ergeben:

IV/7
$$\lambda(iU - V) = M + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$
$$\lambda(iV + U) = N + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Mit $iU - V = W$ lassen sich diese in eine Differenzialgleichung für W zusammenziehen:

IV/8
$$\frac{d^2W}{dz^2} - \frac{2\lambda i}{\nu} W + \frac{i}{\nu} G = 0.$$

Ihre Lösung ist:

IV/9
$$W = \frac{G}{2\lambda} + A_1 e^{+\varrho z} + A_2 e^{-\varrho z},$$

worin die Konstanten A_1 und A_2 durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Denn am Boden der Wassermasse (für $z = 0$) muß: $U = V = W = 0$ sein und weiter muß ihre Oberfläche frei sein, d. h. für $z = h$

IV/10
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Das ergibt:

$$A_1 = -\frac{Ge^{-\varrho h}}{4\lambda \cosh \varrho h} \quad \text{und} \quad A_2 = -\frac{Ge^{+\varrho h}}{4\lambda \cosh \varrho h},$$

und damit wird aus IV/9:

IV/11
$$W = \frac{G}{2\lambda}\left[1 - \frac{\cosh \varrho (h - z)}{\cosh \varrho h}\right].$$

Die Größen U und V erhält man dann aus den Gleichungen IV/7 durch eine einfache Integration und man findet mit Berücksichtigung der Randbedingungen IV/10:

IV/12
$$U = F\left[\frac{z^2}{2} - zh\right] - \frac{G\,i}{4\,\lambda}\left[1 - \frac{\cosh\varrho\,(h-z)}{\cosh\varrho\,h}\right]$$
$$V = iF\left[\frac{z^2}{2} - zh\right] - \frac{G}{4\,\lambda}\left[1 - \frac{\cosh\varrho\,(h-z)}{\cosh\varrho\,h}\right].$$

Zur Bestimmung der Dämpfungskonstanten μ und α muß nun die Kontinuitätsgleichung herangezogen werden. Aus ihr erhält man die Beziehung:

IV/13 $$i\lambda C = -\left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right)\right] F\frac{h^3}{3} - G\frac{i}{4\,\lambda\varrho}\left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \alpha\right)\right]\left[\varrho h - \operatorname{tgh}\varrho h\right].$$

Setzt man $\frac{\operatorname{tgh}\varrho h}{h\varrho} = a - ib$, wobei a und b reelle Zahlen bedeuten, so wird aus IV/13 nach einigen Umformungen:

IV/14 $$\frac{2\nu\lambda}{gh}i = \left[\left(\mu^2 - \frac{\lambda^2}{\varkappa^2} + \alpha^2\right)\left(\frac{h^2}{3} + \frac{\nu b}{2\lambda}\right) + \frac{\mu\nu(1-a)}{\varkappa}\right]$$
$$+ \left[\frac{2\lambda\mu}{\varkappa}\left(\frac{h^2}{3} + \frac{\nu b}{2\lambda}\right) - \left(\mu^2 - \frac{\lambda^2}{\varkappa^2} + \alpha^2\right)\frac{\nu(1-a)}{2\lambda}\right]i.$$

Setzt man nun:

IV/15 $$\mu^2 - \frac{\lambda^2}{\varkappa^2} + \alpha^2 = \varepsilon,\quad \frac{\mu}{\varkappa} = \eta$$

und die gegebenen konstanten Größen

$$\left(\frac{h^2}{3} + \frac{\nu b}{2\lambda}\right) = m \quad \text{und} \quad \nu(1-a) = n,$$

so ergibt die Trennung der Glieder in IV/14 zur Ermittlung der Größen ε und η die Gleichungen:

IV/16
$$m\varepsilon + n\eta = 0$$
$$-\frac{n}{4\,\lambda^2}\varepsilon + m\eta = \frac{\nu}{gh},$$

deren Lösung

IV/17
$$\varepsilon = -\frac{1}{gh}\frac{4\,\lambda^2 n}{4\,\lambda^2 m^2 + n^2}$$
$$\eta = +\frac{1}{gh}\frac{4\,\lambda^2 m}{4\,\lambda^2 m^2 + n^2}$$ sind.

Damit sind die Größen ε und η durch bekannte Werte ausgedrückt und nach IV/15 auch die Dämpfungskonstanten μ und α. Damit ist die Aufgabe gelöst; denn IV/12 gibt zu den Gleichungen IV/5 die Amplituden und IV/17 mit IV/15 die Größen μ und α als Funktionen der Periode $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ und der

Wellenlänge $L = 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}$. Eine Umformung der Größen U und V läßt uns noch etwas tiefer in das Wesen dieser Wellen sehen.

Mit folgenden Festsetzungen:

$$1 - \frac{\cosh\varrho\,(h-z)}{\cosh\varrho\,h} = 1 - \Phi \quad \text{und} \quad \Phi = \varphi - i\psi, \quad \text{wobei}$$

IV/18
$$\varphi = \frac{\cosh\beta\,(2h-z)\cos\beta z + \cosh\beta z\cos\beta\,(2h-z)}{\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h} \quad \text{und}$$

$$\psi = \frac{\sinh\beta\,(2h-z)\sin\beta z + \sinh\beta z\sin\beta\,(2h-z)}{\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h},$$

werden U und V

IV/19
$$U = \frac{gh^2C}{2\nu}\left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \alpha\right)\right]\left[\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2}\right] + \frac{gC}{4\lambda}\left[\left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right) - i\mu\right]\left[(1-\varphi) + i\psi\right]$$

$$V = i\frac{gh^2C}{2\nu}\left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \alpha\right)\right]\left[\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2}\right] - i\frac{gC}{4\lambda}\left[\left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right) - i\mu\right]\left[(1-\varphi) + i\psi\right].$$

Setzt man nun:

IV/20
$$\frac{gC}{4\lambda}\left[\left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right) - i\mu\right]\left[(1-\varphi) + i\psi\right] = u_1 \quad \text{und}$$

$$\frac{gh^2C}{2\nu}\left[\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2}\right]\left[\mu + i\left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \alpha\right)\right] = u_2,$$

dann wird

IV/21
$$U = u_1 + u_2 \quad \text{und} \quad V = -i\,(u_1 - u_2).$$

Nun können wir aber setzen:

$$\left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right) - i\mu = Ae^{-i\gamma_1},$$

wobei $A^2 = \left(\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha\right)^2 + \mu^2$ und $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\mu}{\frac{\lambda}{\varkappa} + \alpha}$ sind, weiters

IV/22
$$\mu - i\left(\alpha - \frac{\lambda}{\varkappa}\right) = Be^{-i\gamma_2},$$

wobei $B^2 = \left(\alpha - \frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2 + \mu^2$ und $\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\alpha - \frac{\lambda}{\varkappa}}{\mu}$ sind, weiters

$$(i - \varphi) + i\psi = \Omega e^{+i\omega},$$

wobei $\Omega^2 = (1-\varphi)^2 + \psi^2$ und $\operatorname{tg}\omega = \frac{\psi}{1-\varphi}$ sind.

Die endgültige Lösung hat dann die Form:

$$u = \frac{gC}{2}\left\{\frac{\Omega A}{2\lambda}\cos\left[\lambda\left(t-\frac{x}{\varkappa}\right)+\omega-\gamma_1\right]\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{\nu}\left(\frac{z}{h}-\frac{z^2}{2h^2}\right)B\cos\left[\lambda\left(t-\frac{x}{\varkappa}\right)-\gamma_2\right]\right\}e^{-\mu x-\alpha y}$$

IV/23
$$v = \frac{gC}{2}\left\{\frac{\Omega A}{2\lambda}\sin\left[\lambda\left(t-\frac{x}{\varkappa}\right)+\omega-\gamma_1\right]\right.$$
$$\left.-\frac{h^2}{\nu}\left(\frac{z}{h}-\frac{z^2}{2h^2}\right)B\sin\left[\lambda\left(t-\frac{x}{\varkappa}\right)-\gamma_2\right]\right\}e^{-\mu x-\alpha y}$$

$$\xi = C\cos\lambda\left(t-\frac{x}{\varkappa}\right)e^{-\mu x-\alpha y}.$$

Zur Diskussion der Lösung können wir der Einfachheit halber die Verhältnisse an einem Punkte $x = 0$ und $y = 0$ betrachten. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v setzen sich aus z w e i periodischen Teilen zusammen. Die erste Bewegung mit der Amplitude $\frac{gC}{4\lambda}\Omega A$ muß wohl im wesentlichen dem Einfluß der Reibung zugeschrieben werden. Der Reibungskoeffizient ν tritt bei ihr sowohl in der Amplitude wie auch in der Phase auf. Diese beiden Größen sind außerdem von der Wasserhöhe z über dem Boden abhängig. Nach IV/18 war

$$\Phi = \frac{\cosh\varrho(h-z)}{\cosh\varrho h} = e^{-\varrho z}+e^{-\varrho h}\cdot\frac{\sinh\varrho z}{\cosh\varrho h}.$$

Für große Werte von ϱh kann man in großer Annäherung $\Phi = e^{-\varrho z}$ setzen. Dann wird aber $\varphi = e^{-\beta z}\cos\beta z$ und $\psi = e^{-\beta z}\sin\beta z$ und damit

$$\Omega = \sqrt{1-2e^{-\beta z}\cos\beta z+e^{-2\beta z}}.$$

Unter denselben Verhältnissen wird

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\psi}{1-\varphi} = \frac{e^{-\beta z}\sin\beta z}{1-e^{-\beta z}\cos\beta z},$$

und man erhält am Boden für $z = 0$ $\omega = 45$ und für große z $\omega = 0$.

Die hier auftretenden Ausdrücke für Ω und $\operatorname{tg}\omega$ sind identisch mit jenen, die bei der Ableitung des Gradientstromes über tiefem Wasser oder des Gradientwindes über dem Erdboden nach der von V. W. E k m a n gegebenen klassischen Theorie auftreten. Die Amplitude dieser ersten periodischen Bewegung, deren Periode die einer Trägheitsschwankung ist, nimmt vom Boden, wo sie null ist, rasch auf den Wert $\frac{gh}{4\lambda}AC$ zu, da sich Ω für Werte von z, die größer als die E k m a n sche Reibungstiefe $D = \pi\cdot\sqrt{\frac{2\nu}{\lambda}}$ sind, von 1 nur minimal unterscheidet. Wenn man von der Fortpflanzung der Welle absieht, liegen die Teilchen zur Zeit $t = 0$ auf einer Ekmanschen

Spirale, die sich dann mit der Zeit entgegen dem Uhrzeigersinn (contra sole) im Laufe einer Periode $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ herumbewegt. Für eine bestimmte Tiefe sind die Amplituden der Komponenten einander gleich, ihr Phasenunterschied ist auch 90^0, wie es einer reinen Trägheitsschwankung entspricht, aber der Umlaufsinn im Trägheitskreis ist entgegen dem einer reinen Trägheitsbewegung.

Im Gegensatz dazu ist die zweite periodische Bewegung eine reine Trägheitsbewegung, bei der aber die Amplitude vom Wert Null am Boden rasch auf den Wert $\frac{gh^2}{4\lambda}$ BC ansteigt. Abb. 1 gibt die Funktion von 0 bis h wieder; diesem Anstieg ist die Zunahme der Amplitude der zweiten periodischen Bewegung proportional.

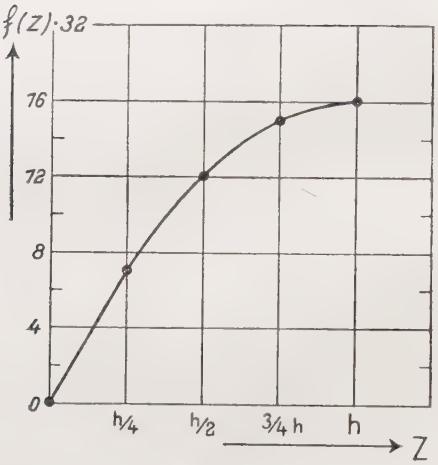

Abb. 1. Verlauf der Funktion f(z).

Beide periodischen Bewegungen, die dieselbe Periode $T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}$ Pendeltag haben, laufen einander entgegen auf dem Trägheitskreis; welche Bewegungsrichtung aber diese Überlagerung aufweisen wird, ist schwer zu sagen. Es kann der Fall vorkommen, daß der Umlaufsinn der Stromfigur sich in vertikaler Richtung ändert, wie es bekanntlich bei Stromfiguren der Gezeitenströme im flacheren Wasser, wo der Einfluß der Reibung mehr zur Geltung kommt, tatsächlich vorkommt. Man erkennt aber vor allem, daß die Reibungseinflüsse nicht allein eine d ä m p f e n d e Wirkung auf die Trägheitsbewegungen ausüben, sondern auch in den ganzen Mechanismus ihres Ablaufs eingreifen und diesen Trägheitsbewegungen ein Aussehen verleihen können, das weit von der Bewegung r e i n e r Trägheitswellen absteht.

Die hier gegebene Ableitung umgeht wieder den Grenzübergang von einer willkürlich angenommenen Frequenz der Wellenbewegung σ zur vorgegebenen Frequenz der Trägheitsschwingungen λ, der notwendig ist, will man zu Trägheitswellen gelangen. Ein solcher Grenzübergang ist umständlich, wie die entsprechende Darstellung von J. E. F j e l d s t a d in der schon früher angeführten umfassenden Arbeit über Gezeitenwellen zeigt. Man umgeht diesen Grenzübergang hier, wie früher (S. 12) durch Einführung einer Hilfsfunktion $iu - v = w$, die sich als sehr praktisch erwiesen hat.

V. OZEANISCHE UND ATMOSPHÄRISCHE ERSCHEINUNGEN, BEI DENEN MIT DEM AUFTRETEN VON TRÄGHEITSBEWEGUNGEN ZU RECHNEN IST.

Die hier behandelten Fragen über Trägheitsbewegungen und Trägheitswellen betreffen in erster Linie die Möglichkeit solcher Schwingungen in einem flüssigen Medium auf der rotierenden Erde. Wenn wir nun zu be-

stimmten Erscheinungen, die im Ozean oder in der Atmosphäre der Erde tatsächlich auftreten, übergehen, so handelt es sich darum, hier festzustellen, bei welchen dieser Erscheinungen und auf welche Weise sich solche Trägheitsbewegungen ausbilden und, da die Reibung stets vorhanden ist, wie diese Trägheitsbewegungen unter ihrem Einfluß abklingen. Wir haben schon früher hervorgehoben, daß bei jeder Störung einer stationären Grundströmung Trägheitsschwankungen auftreten müssen. Wir wollen im folgenden solche Störungen bestimmter Art näher betrachten und die mit ihnen verknüpften Trägheitsschwingungen ableiten. Wir beginnen mit dem Fall eines Triftstroms im Meer, der sich bei plötzlich einsetzendem Windeinfluß vorgegebener Intensität einstellt.

1. Triftstrom bei unvermitteltem Windeinsatz.

Die Lösung dieses Falles steht bereits in V. W. Ekmans bekannter Arbeit über den Einfluß der Erdrotation auf die Meeresströmungen. In dieser klassischen Untersuchung werden in erster Linie die stationären Triftströme behandelt; für den nicht stationären Zustand wird nur der einfachste Fall eines unvermittelt einsetzenden Windeinflusses über einem unbegrenzt tiefen Ozean nach einer Lösung von J. Fredholm mitgeteilt. Sie hat in erster Linie den Zweck, eine Vorstellung davon zu bekommen, welche Zeit die Erreichung des schließlichen stationären Zustandes erfordert. Setzt der Wind zur Zeit $t = 0$ plötzlich mit einem Tangentialdruck T in der Richtung der positiven y-Achse ein, dann sind die Geschwindigkeitskomponenten u und v in der x- und y-Richtung gegeben. Und zwar durch:

$$u = \frac{2\pi T}{\varrho D \lambda} \int_0^\tau \frac{\sin 2\pi\xi}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{\pi z^2}{4 D^2 \xi}} d\xi \quad \text{und} \quad v = \frac{2\pi T}{\varrho D \lambda} \int_0^\tau \frac{\cos 2\pi\xi}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{\pi z^2}{4 D^2 \xi}} d\xi.$$

Hierin ist die Reibungstiefe $D = \pi \cdot \sqrt{\frac{2\nu}{\varrho \lambda}}$, ν der virtuelle Reibungskoeffizient und $\tau = t \frac{\lambda}{2\pi}$ die Zeit ausgedrückt in 12 Pendelstunden $= \left(\frac{12 \text{ Sonnenstunden}}{\sin \varphi}\right)$ als Einheit. Die allmähliche Ausbildung der Triftströme ersieht man am besten durch die Darstellung der mit der Zeit variablen Geschwindigkeitsvektoren in den verschiedenen Tiefen, d. h. durch die bekannten Hodographenkurven für die einzelnen Tiefen, wie sie schon von V. W. Ekman gegeben worden sind. Der Hodograph der Windtrift bei unvermitteltem Windeinsatz ist eine Spirale in einem Punkt, der dem stationären Zustand entspricht. Jede Runde wird in einem halben Pendeltag zurückgelegt, die Schwingungsweite nimmt hierbei allmählich ab. Trägt man sich die Geschwindigkeitskomponenten längs der Zeitachse für sich auf, so bekommt man die Kurven der Abb. 2 oben. Der Geschwindigkeitsverlauf jeder Komponente hat die Form einer gedämpften Schwingung um den stationären Zustand als Mittellinie und beide zusammen zeigen mit besonderer Deutlichkeit alle charakteristischen Merkmale einer reinen Trägheitsschwingung der sich allmählich ausbildenden Windtrift. In den verschiedenen Tiefen verlaufen die Schwankungen genau gleichsinnig in der Phase, jedoch mit ab-

nehmender Amplitude. Schon dieser erste Fall zeigt uns, daß bei Windtriften, die sich bei rasch einsetzendem Windeinfluß ausbilden, stets mit Trägheitsschwankungen zu rechnen ist.

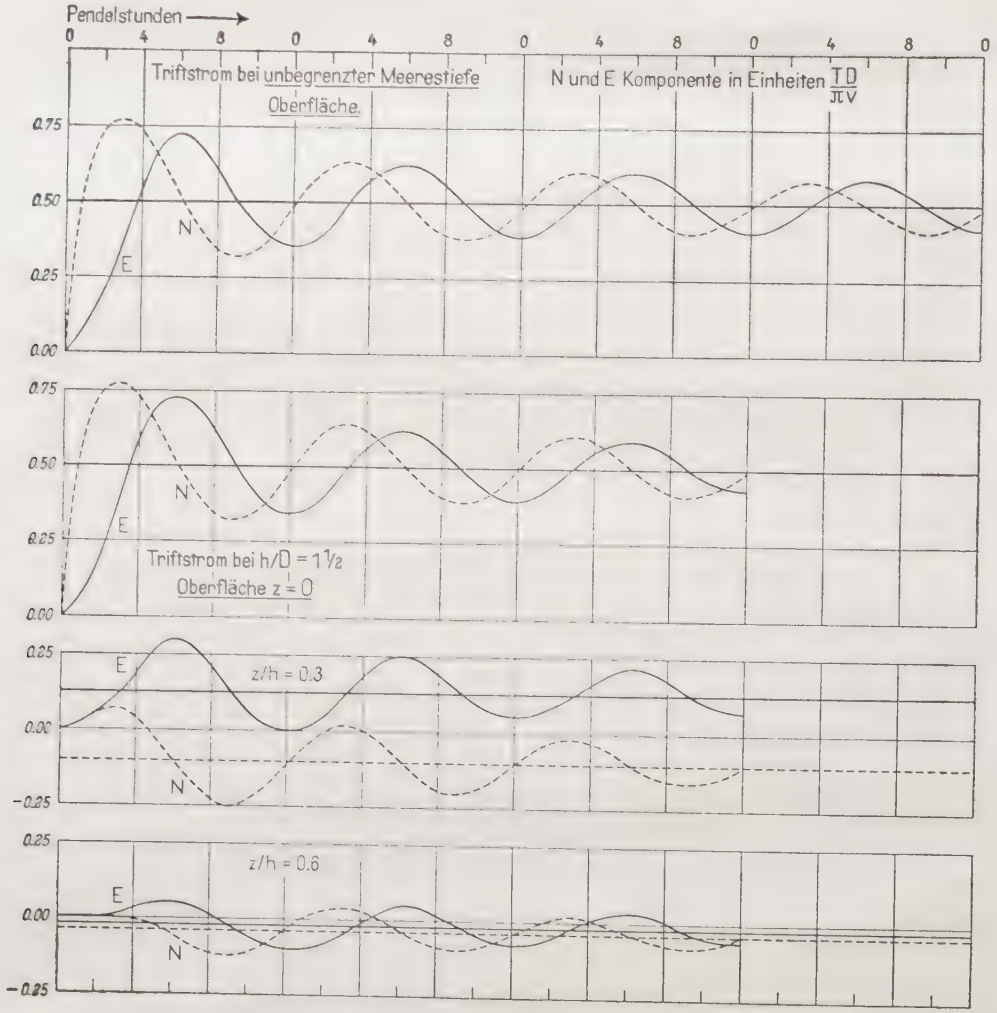

Abb. 2. Oberstes Kurvenpaar: Triftstrom bei unbegrenzter Meerestiefe für z = 0 (Oberfläche). Untere Kurvenpaare: Triftstrom bei $\frac{h}{D} = 1^1/_2$, und zwar für z = 0 (Oberfläche), $\frac{z}{h} = 0{,}3$ und $\frac{z}{h} = 0{,}6$ (Nord- und Ostkomponente stets in Einheiten $\frac{TD}{\pi\nu}$).

Ist das Meer nicht unbegrenzt tief, sondern besitzt es eine Tiefe h, dann wird die Wirkung des Windes von der Tiefe der Wasserschicht abhängig. Lösungen für Meere endlicher Tiefe sind von J. E. Fjeldstad 1930 gegeben worden, und zwar auch für den Fall, daß der Tangentialdruck des

Windes mit der Zeit veränderlich ist und gleichzeitig an der Oberfläche des Meeres auch ein Widerstand proportional der Geschwindigkeit wirkt (z. B. als Einfluß einer Eisdecke). Die Lösung wird in der Form bestimmter Integrale gegeben. Etwas später (1933) hat K. Hidaka in einer groß angelegten Arbeit: „Non stationary ocean-currents", Part I, Lösungen desselben Problems durch Einführung von orthogonalen Eigenfunktionen in der Form unendlicher Reihen, die rasch konvergieren, gegeben. Hierbei ist der Windeinfluß konstant oder variabel und der Reibungskoeffizient als Funktion der Tiefe angenommen worden. Wenn die Meerestiefe etwas größer als die Reibungstiefe D ist, ist ein Unterschied gegenüber dem Fall unendlicher Meerestiefe so gering, daß er unmerklich wird. In Abb. 2 steht an zweiter Stelle für $\frac{h}{D} = \frac{3}{2}$ der zeitliche Ablauf der beiden Geschwindigkeitskomponenten für die Oberfläche $z = 0$, darunter für die Tiefen $\frac{z}{h} = 0{,}3$ und $0{,}6$. Man erkennt aus dem Vergleich der Oberflächenkurve mit der darüberstehenden Kurve für $h = \infty$, daß ein wesentlicher Unterschied nicht besteht. Wenn die Wassertiefe h kleiner als D wird, macht sich der Einfluß der Bodennähe bemerkbar. Abb. 3 gibt die Oberflächenkurven für die Fälle $\frac{h}{D} = 1, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ nach den von Hidaka gegebenen Werten. Ist die Wassertiefe von der Größenordnung der Reibungstiefe, dann gibt es Trägheitsschwingungen fast so wie bei unendlich großer Wassertiefe; aber mit Abnahme derselben bedingt der Einfluß der Bodenreibung eine sehr starke Dämpfung der Schwingungen, so daß für $\frac{h}{D} = \frac{1}{4}$ der Strom sich fast aperiodisch auf den stationären Wert einstellt.

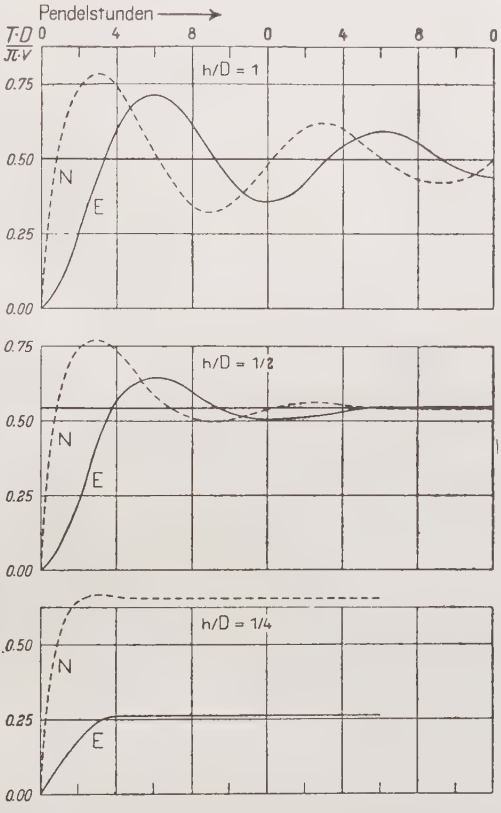

Abb. 3. Triftstrom an der Meeresoberfläche bei den Meerestiefen $\frac{h}{D} = 1$, $\frac{h}{D} = {}^1/_2$ und $\frac{h}{D} = {}^1/_4$.

2. Triftstrom bei allmählich einsetzendem bzw. aussetzendem Windeinfluß.

Wenn angenommen wird, daß die Wirkung des Windes nicht plötzlich einsetzt, sondern erst allmählich erfolgt, so sind die Verhältnisse etwas andere.

Namentlich bei einer geringen Wassertiefe macht sich dies bemerkbar. Denn der sich allmählich entwickelnde Triftstrom hat, wenn die Einstellung des Windes auf die volle Stärke längere Zeit in Anspruch nimmt, genügend Zeit, seine Richtung und Stärke dem Winde anzupassen und die Störung vom jeweiligen Gleichgewichtszustand ist dann nicht so groß wie im Falle eines plötzlichen Einsatzes. Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen finden sich wieder bei J. E. F j e l d s t a d und K. H i d a k a. Bei letzterem ist auch ein Fall zahlenmäßig ausgerechnet. Die graphische Darstellung der Schwankungen der beiden Geschwindigkeitskomponenten ist in Abb. 4 gegeben; hierbei ist $\frac{h}{D} = 1$, und der Wind nähert sich bei gleichbleibender Richtung nach einer e-Potenz derart der schließlichen vollen Stärke, daß er in einem Pendeltag sie bis zu 98% erreicht. Man erkennt, daß es auch hier zur Ausbildung von Trägheitsbewegungen kommt; allerdings sind sie, wie zu erwarten, nicht so groß und gut ausgebildet wie bei plötzlichem Windeinsatz. Der Phasenunterschied bleibt gleich einem Viertel der Periode, aber nur wenn die Schwankungen auf eine Mittellinie bezogen werden. Das Charakteristische der Trägheitsbewegung ist demnach erhalten geblieben.

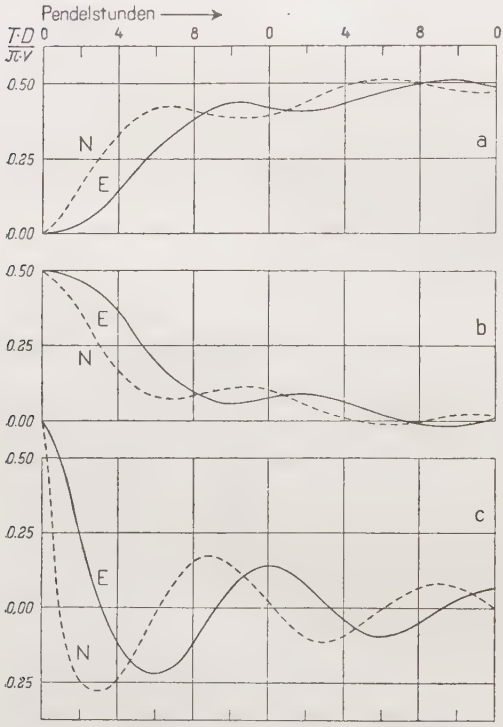

Abb. 4. Triftstrom an der Meeresoberfläche bei der Meerestiefe $\frac{h}{D} = 1$:
a) bei allmählich einsetzendem Wind,
b) bei allmählich abflauendem Wind,
c) bei plötzlich aussetzendem Wind.

Ein weiterer interessanter Fall ist die Annahme, daß bei einer Windtrift der sie erhaltende Windeinfluß plötzlich bzw. allmählich aussetzt. Auch hier erfolgt der Abfall der Geschwindigkeit unter Trägheitsschwankungen; im ersten Fall sind sie, wie im entsprechenden inversen Fall, gut entwickelt, im zweiten angedeutet, aber man kann feststellen, daß auch beim Abklingen des Windeinflusses Trägheitsschwingungen im Stromfeld des Meeres zu erwarten sind. Zahlenmäßige Beispiele für $\frac{h}{D} = 1$ findet man bei K. H i d a k a; in unserer Darstellung in Abb. 4 sind sie teilweise wiedergegeben.

3. Gradientströme bei unvermittelt bzw. allmählich einsetzendem Druckgradienten im Ozean.

Die plötzliche Ausbildung der Schiefstellung der Oberfläche eines homogenen Meeres muß in ähnlicher Weise zu Trägheitsschwankungen und dem stationären Endzustand führen, wie im Falle eines plötzlichen Windeinsatzes. Auch für diesen Fall hat V. W. Ekman die ersten theoretischen Grundlagen gegeben. Er hat hier die wesentlichen Züge der in periodischen Trägheitsschwankungen vor sich gehenden Einstellung auf den stationären Zustand aufgedeckt. Weiter hat er schon hervorgehoben, daß für einen Ozean größerer Tiefe diese Trägheitsschwankungen sehr langsam abklingen, so daß im allgemeinen mit einer langen Dauer derselben zu rechnen ist. Eine Durchrechnung desselben Problems für ein Meer endlicher Tiefe hat später K. Hidaka wieder mit Hilfe orthogonaler Funktionen gegeben. Ich will hier eine etwas andere Ableitung geben, die wegen ihrer Kürze und deutlichen Hervorhebung der einzelnen Schritte vielleicht von Interesse ist.

Lassen wir das Druckgefälle, das in einem homogenen Meer durch die Neigung der Meeresoberfläche um den Winkel γ gegenüber der Ruhelage entsteht und die Größe $G = g \sin \gamma$ hat, in der Richtung der positiven y-Achse wirken, dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung:

V/2
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v = \frac{\varkappa}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u = \frac{\varkappa}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + G.$$

Sie sind zu lösen mit Berücksichtigung der Randbedingungen:

V/3
$$\text{für } z = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$
$$\text{für } z = h \quad u = v = 0$$
$$\text{für } t = 0 \quad u = v = 0.$$

Hierzu kommt noch eine Bedingung, die aus der Erwägung resultiert, daß mit der Zeit die Bewegung sich dem stationären Zustand nähern und ihn schließlich erreichen muß:

$$u = u_{st} \text{ und } v = v_{st} \quad \text{für } t = \infty.$$

Setzt man $u + iv = w$, dann wird aus V/2:

V/4
$$\frac{\partial w}{\partial t} + i\lambda w = \frac{\varkappa}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + iG.$$

Den stationären Zustand w_{st} erhält man, wenn man in V/4 $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ setzt; die Lösung dieser Differentialgleichung mit den Randbedingungen ergibt die schon von V. W. Ekman gegebene Lösung in der Form:

$$w_{st} = \frac{G}{\lambda}\left[1 - \frac{\cosh(1+i)\,\pi\frac{z}{D}}{\cosh(1+i)\,\pi\frac{h}{D}}\right] = \frac{G}{\lambda}(1-\varphi+i\psi),$$ worin:

V/5
$$\varphi = \frac{\cosh\frac{\pi}{D}(h+z)\cos\frac{\pi}{D}(h-z) + \cosh\frac{\pi}{D}(h-z)\cos\frac{\pi}{D}(h+z)}{\cosh 2\pi\frac{h}{D} + \cos 2\pi\frac{h}{D}}$$ und

$$\psi = \frac{\sinh\frac{\pi}{D}(h+z)\sin\frac{\pi}{D}(h-z) + \sinh\frac{\pi}{D}(h-z)\sin\frac{\pi}{D}(h+z)}{\cosh 2\pi\frac{h}{D} + \cos 2\pi\frac{h}{D}}$$ ist.

Es läßt sich aber für den stationären Zustand auch leicht eine Lösung in Reihenform finden, denn ein partikuläres Integral muß mit Berücksichtigung der Randbedingungen die Form $A_n \cos\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{h}\cdot z$ haben (n eine ganze Zahl). Setzt man nun:

V/6
$$w_{st} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{h}\cdot z$$

und berücksichtigt, daß durch die Entwicklung von 1 in eine Fourier-Reihe

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi}\cos\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{h}z$$
$$-h < z < +h$$

wird, so liefert die Differentialgleichung zur Ermittlung der Konstanten A_n die Beziehung:

$$-\left(i\lambda + \frac{\varkappa}{\varrho}\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4h^2}\right)A_n + iG\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} = 0.$$

Daraus folgt:

$$A_n = \frac{G}{\lambda}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon_n^2 + i\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n^2},$$

wenn

V/7
$$\varepsilon_n = \frac{8}{(2n-1)^2}\cdot\left(\frac{h}{D}\right)^2$$

gesetzt wird. Aus V/6 folgt dann:

V/8
$$w_{st} = u_{st} + iv_{st} = \frac{G}{\lambda}\cdot\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{h}z\left[\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n^2} + i\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n^2}\right].$$

Diese Lösung V/8 ist identisch mit der Lösung V/5.

Für den nichtstationären Fall V/4 machen wir nun den Ansatz:

V/9 $$w = w_{st} - w_{st} \cdot f(t)$$

mit der Bedingung, daß für $t = \infty$ $f(\infty) = 0$ sein muß. In V/4 eingesetzt, gelingt eine Trennung der Funktionen w_{st} und $f(t)$, und es wird:

V/10 $$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + i\lambda = \frac{\varkappa}{\varrho}\frac{1}{w_{st}}\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial z^2} = -B,$$

worin B eine Konstante, zunächst völlig frei, bedeutet. Die erste der obigen Gleichungen ergibt

$$f = e^{-(B+i\lambda)t} = e^{-Bt}(\cos\lambda t - i\sin\lambda t),$$

was die Bedingung $f(\infty) = 0$ erfüllt.
Zur Bestimmung der Konstanten B dient die zweite der obigen Gleichungen

V/11 $$\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial z^2} + \frac{\varrho}{\varkappa} \cdot B w_{st} = 0.$$

Die Form der Ausdrücke für w_{st} in V/5 und V/8 zeigt sofort, daß für B keine geschlossene Form zu finden ist, sondern für jedes Glied der Reihe verschieden ist. Es ergibt sich aus V/11, daß $B_n = \frac{\lambda}{\varepsilon_n}$ wird. Die Lösung der Differentialgleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen ist demnach:

V/12
$$u = u_{st} - \frac{G}{\lambda}\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\cos\frac{2n-1}{2(1+\varepsilon_n^2)}\frac{\pi z}{h}[\varepsilon_n^2\cos\lambda t + \varepsilon_n\sin\lambda t]\,e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_n}t}$$

$$v = v_{st} - \frac{G}{\lambda}\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\cos\frac{2n-1}{2(1+\varepsilon_n^2)}\frac{\pi z}{h}[\varepsilon_n\cos\lambda t - \varepsilon_n^2\sin\lambda t]\,e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_n}t}.$$

Die Lösung stellt in beiden Komponenten eine Schwankung mit Trägheitsperiode und abklingender Amplitude um den schließlichen stationären Zustand dar. Die Amplitude der Schwankung ist, wenn man zunächst von der Dämpfung absieht, groß; denn sie entspricht dem Totalwert der Geschwindigkeitskomponente im stationären Falle selbst. So wird z. B. für große Meerestiefen nach V/7 ε_n eine große Zahl, B_n eine kleine Zahl, $e^{-B_n t}$ ungefähr gleich 1 und für die Oberflächenschichten

$$u = \frac{G}{\lambda} - \frac{G}{\lambda}\cos\lambda t$$

$$v = \quad + \frac{G}{\lambda}\sin\lambda t,$$

was eine einfache Trägheitsbewegung mit dem Radius $\frac{G}{\lambda}$ um den Punkt $\left(\frac{G}{\lambda}, 0\right)$ darstellt.

In Wirklichkeit erfolgt immer ein Abklingen in Spiralform, aber dieses Abklingen ist über großen Meerestiefen sehr schwach. Noch bis nahe am

Meeresboden, wo die Reibung sich stärker bemerkbar macht, sind die Trägheitsschwingungen deutlich nachweisbar.

K. Hidaka hat für verschiedene Verhältnisse h/D die Hodographen für eine Anzahl Tiefen gegeben; in unserer Darstellungsweise ist in Abb. 5 für den Fall $\frac{h}{D} = \frac{3}{2}$ der Verlauf der Geschwindigkeitskomponenten für die Oberfläche $z = 0$ und für die Tiefen $\frac{z}{h} = 0{,}5$ und $0{,}9$ gegeben. Man erkennt,

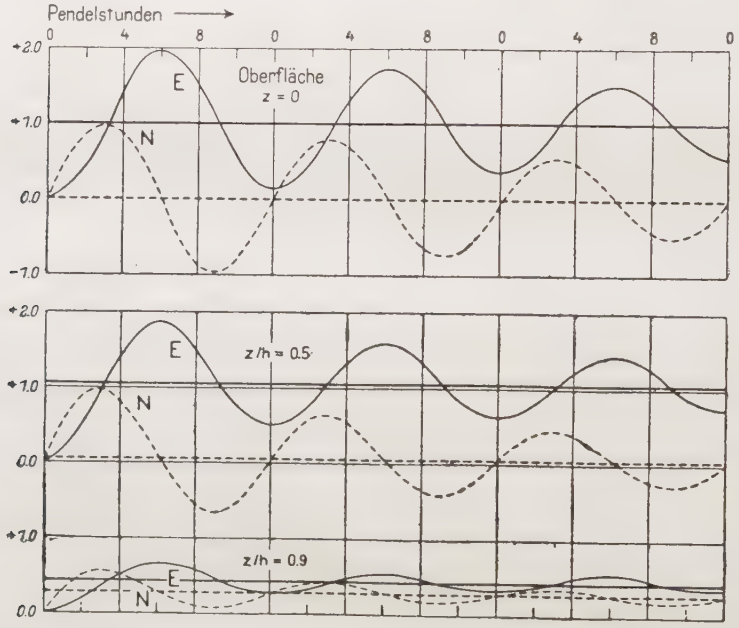

Abb. 5. Gradientstrom im Meer bei einer Meerestiefe $\frac{h}{D} = \frac{3}{2}$, und zwar für $z = 0$ (Oberfläche), $\frac{z}{h} = 0{,}5$ und $\frac{z}{h} = 0{,}9$ $\left(\text{Werte der Nord- und Ostkomponente für } \frac{u \text{ bzw. } v}{\frac{g \sin \gamma}{\lambda}}\right)$.

daß noch in der Mitteltiefe die Amplitude der Trägheitsschwankungen recht ansehnlich und die Dämpfung recht klein ist.

Nach obiger Methode läßt sich auch der Fall der allmählich vor sich gehenden Gradientausbildung behandeln. Auch K. Hidaka gibt eine entsprechende Lösung. Je nach der mehr oder minder größeren Schnelle in der Ausbildung des Gradienten bilden sich Trägheitsschwingungen größerer oder kleinerer Amplituden. Im wesentlichen bleibt aber der Charakter der Schwankungen als Trägheitsbewegungen bestehen. Für den Fall $\frac{h}{D} = 1$ und der Oberfläche ist in Abb. 6 der Verlauf der Nord- und Ostkomponente

für 1½ Pendeltage gegeben. Die Meeresoberfläche stellt sich hier auf ihre schließliche Neigung in einem Pendeltag bis zu 98% ein. Der Vergleich mit der obersten Kurve der Abb. 5 zeigt, wie stark in diesem Fall kleinerer Wassertiefe die Amplitude absinkt.

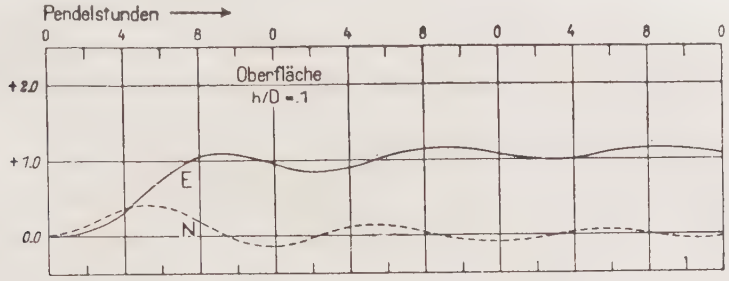

Abb. 6. Gradientstrom im Meer bei allmählich sich ausbildendem Druckgefälle $\left(\frac{h}{D} = 1,\ \text{Oberfläche, Werte für } \frac{u \text{ bzw. } v}{\frac{g \sin \gamma}{\lambda}} \text{ und } \sigma = \pi\right)$.

4. Gradientwind bei unvermittelt bzw. allmählich einsetzendem Druckgradienten.

Ähnlich wie im Ozean muß es auch in der Atmosphäre zu Trägheitsschwingungen kommen, wenn der Gleichgewichtszustand zwischen Druck- und Stromfeld irgendwie gestört wird. Wenn vom Zustand der Ruhe aus sich in der Atmosphäre durch Entstehung eines Druckgefälles ein Gradientwind entwickelt, dann wird analog wie im Ozean seine Ausbildung von Trägheitsschwingungen mit der Periode eines halben Pendeltages begleitet sein. Die theoretische Ableitung dieser Erscheinungen schließt sich an die entsprechenden eines Gradientstromes im Ozean an, mit dem alleinigen Unterschied, daß die Atmosphäre nach oben bis in große Höhen (bis ins „Unendliche") reicht und die Befriedigung der Randbedingungen dadurch anders ausfallen wird.

Wir wollen zunächst den Fall behandeln, daß in einer vor der Zeit $t = 0$ in Ruhe befindlichen Atmosphäre sich unvermittelt ein Druckgradient G in der Richtung der positiven y-Achse zu wirken beginnt und dadurch eine Luftströmung einleitet. Mit der Zeit wird sich der bekannte Gleichgewichtszustand des „Gradientwindes", der in unserem Fall (auf der Nordhemisphäre) in den unteren Luftschichten die Form der bekannten Ekmanschen Spirale besitzt, in größeren Höhen aber in der Richtung der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit $\frac{G}{\lambda}$ weht, immer wieder einstellen. Gefragt wird: Wie stellt sich dieser Gleichgewichtszustand ein und wie lange dauert es?

Die Differentialgleichung der Bewegung ist dieselbe wie in V/2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v = \frac{\varkappa}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u = \frac{\varkappa}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + G.$$

Legen wir den Erdboden in $z = 0$ und zählen wir die Höhen darüber positiv nach oben, dann lauten die Randbedingungen:

V/13 für $z = 0$, $u = v = 0$ und für $t = 0$, $u = v = 0$,

wobei für große Höhen u und v endlich bleiben müssen.

Setzt man eine Lösung in der Form:

V/14 $$w = u + iv = \frac{G}{\lambda} + e^{-i\lambda t}\,\varphi(z,t),$$

so ergeben die obigen Gleichungen, daß die Funktion $\varphi(z,t)$ der Differentialgleichung

V/15 $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - = \frac{\varkappa}{\varrho}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{für } z = 0 \quad \varphi(0,t) = -\frac{G}{\lambda}e^{i\lambda t} \text{ und}$$

$$\text{für } t = 0 \quad \varphi(z,0) = -\frac{G}{\lambda} \text{ genügen muß.}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich auf die bekannten Lösungen der Wärmeleitung zurückführen und sofort niederschreiben (siehe z. B. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik, 4. Aufl., Bd. II, S. 91 u. ff.). Die endgültige Lösung des Problems lautet schließlich, wenn mit $\Phi(x)$ das Fehlerintegral bezeichnet wird:

V/16 $$w = \frac{G}{\lambda}\left[1 - e^{-i\lambda t}\cdot\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\frac{\varkappa t}{\varrho}}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2\sqrt{\frac{\varkappa t}{\varrho}}}}^{\infty} e^{-\frac{i\lambda\varrho z^2}{4\varkappa\alpha^2}}\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right].$$

Sie erfüllt die Randbedingungen V/13, denn Φ ist für $z = 0$ Null und das dritte Glied mit dem Integral ist gleich 1, somit $w = 0$, und für $t = 0$ das zweite Glied mit Φ gleich 1 und das Integral gleich Null, und damit ebenfalls $w = 0$. Die Lösung entspricht auch der Bedingung, daß für $t = \infty$ w sich dem stationären Zustand nähert; denn für $t = \infty$ wird das zweite Glied des Klammerausdruckes Null und

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{i\lambda\varrho z^2}{4\varkappa\alpha^2}}\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\cos\frac{\lambda\varrho z^2}{4\varkappa\alpha^2} - i\sin\frac{\lambda\varrho z^2}{4\varkappa\alpha^2}\right] e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

was, wenn $D = \pi\sqrt{\frac{2\varkappa}{\lambda\varrho}}$ die „Reibungshöhe“ gesetzt wird, nach den Formeln in Riemann-Weber, Part. Differentialgleichungen, 4. Aufl., S. 110, gleich

$$= e^{-\pi\frac{z}{D}}\left(\cos\pi\frac{z}{D} - i\sin\pi\frac{z}{D}\right) \text{ ist.}$$

Der stationäre Zustand wird demnach:

$$\text{V/17} \qquad u_{st} = \frac{G}{\lambda}\left[1 - e^{-\pi\frac{z}{D}} \cos \pi \frac{z}{D}\right] \quad \text{u d} \quad v_{st} = \frac{G}{\lambda} e^{-\pi\frac{z}{D}} \sin \pi \frac{z}{D},$$

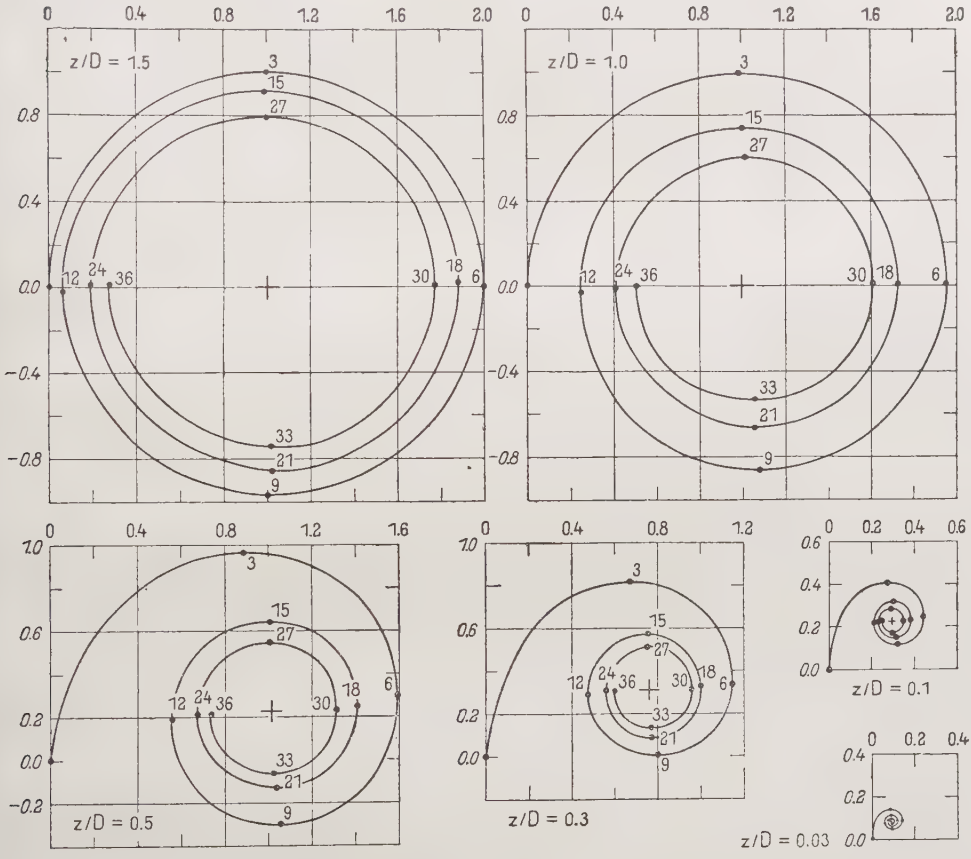

Abb. 7a. Trägheitsschwingungen im Gradientwind in verschiedenen Höhen über dem Erdboden in Hodographen-Darstellung.

was tatsächlich der bekannten Lösung in der Form der Ekman-Spirale entspricht, in der der Wind in der Höhe D das erste Mal die Richtung des „Gradientwindes" $\frac{G}{\lambda}$ in der Richtung der positiven x-Achse erreicht*). Die Lösung V/16 erhält, in u und v zerlegt, somit die Form:

*) Siehe z. B. H. Koschmieder, Dynamische Meteorologie. Leipzig 1933, S. 261.

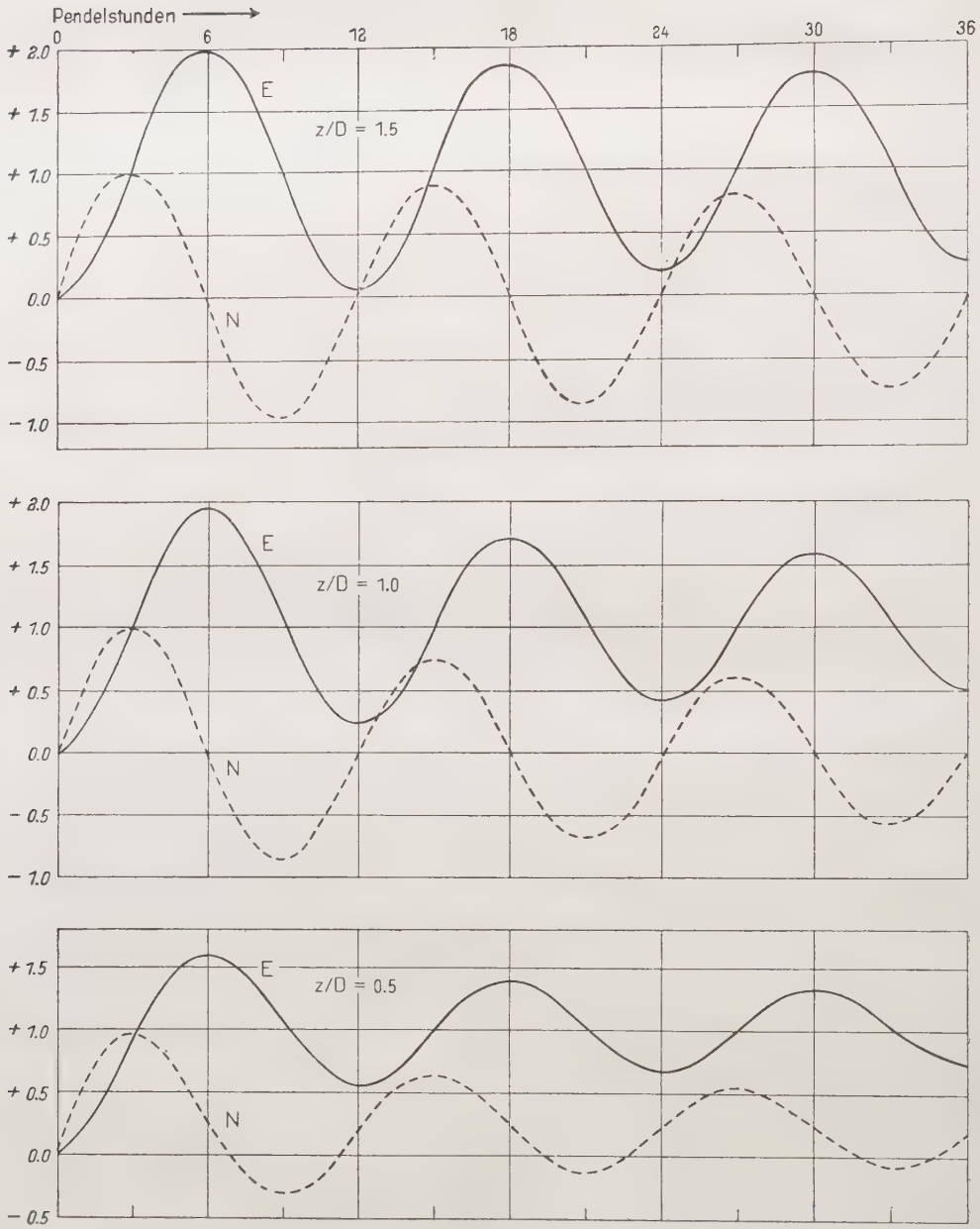

Abb. 7b. Trägheitsschwingungen im Gradientwind bei unvermittelt einsetzenden Druckgradienten in den Höhen $\frac{z}{D} = 1{,}5,\ 1{,}0$ und $0{,}5$.

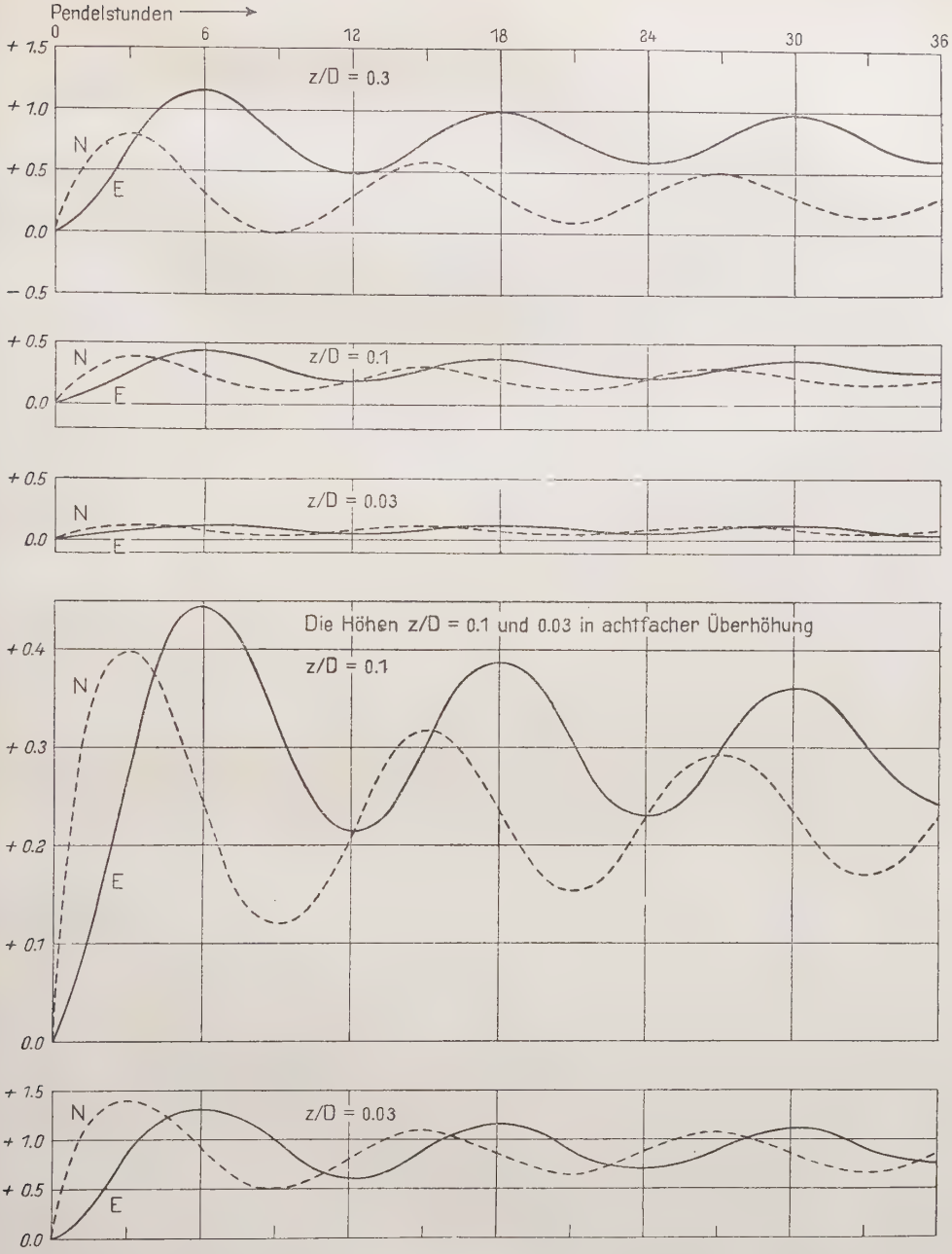

Abb. 7c. Fortsetzung der Abb. 7b: Trägheitsschwingungen im Gradientwind bei unvermittelt einsetzenden Druckgradienten in den Höhen $\frac{z}{D} = 0{,}3,\ 0{,}1$ und 0,03.

Die zwei untersten Kurvenpaare wiederholen den Verlauf der Komponenten für $\frac{z}{D} = 0{,}1$ und 0,03 in achtfacher Überhöhung.

$$u = \frac{G}{\lambda}\left[1 - \cos \lambda t \, \Phi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}}\frac{z}{D}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}}\frac{z}{D}}^{\infty} e^{-\alpha^2} \cos\frac{\pi^2}{2\alpha^2}\frac{z^2}{D^2}\, d\alpha\right]$$

V/18

$$v = \frac{G}{\lambda}\left[\sin \lambda t \, \Phi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda}}\frac{z}{D}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}}\frac{z}{D}}^{\infty} e^{-\alpha^2} \sin\frac{\pi^2}{2\alpha^2}\frac{z^2}{D^2}\, d\alpha\right].$$

Man erkennt sofort, daß für große z (im Verhältnis zu D) das Integralglied klein und $\Phi = 1$ wird, so daß für große Höhen

$$u = \frac{G}{\lambda}(1 - \cos \lambda t) \text{ und } v = \frac{G}{\lambda}\sin \lambda t$$

wird. Das ist eine reine kreisförmige Trägheitsbewegung um den Punkt $\left(+\frac{G}{\lambda}, 0\right)$, die stets vorhanden ist und außerordentlich langsam abklingt. Für kleinere Tiefen entspricht die Abnahme der Amplitude im wesentlichen dem Verlauf der Φ-Funktion, wobei die Dämpfung auch durch das dritte Glied mitbestimmt wird. Im folgenden sei ein Beispiel für die Tiefen $\frac{z}{D} = 0{,}03, 0{,}1,$ 0,3, 0,5, 1,0 und 1,5 gegeben. Die entsprechenden graphischen Darstellungen sind in Abb. 7 gegeben; Tab. 3 gibt die dazugehörigen Zahlenwerte. Man erkennt, daß auch in Bodennähe immer noch ganz deutlich die Einstellung auf den stationären Wert in der Form von abklingenden Trägheitsschwingungen erfolgt. Je größer die Entfernung vom Boden, desto größer wird die Amplitude dieser Schwingungen, und schon in $\frac{z}{D} = 1$ sind das Wesentliche im Bild die großen Trägheitsschwingungen, deren Amplitude nur sehr langsam abnimmt. Als Ergebnis dieser theoretischen Überlegungen ist zu erwarten, daß in der Atmosphäre Trägheitsschwingungen des Windvektors nichts Ungewöhnliches sein dürften, ja daß sie zu den regelmäßigen Erscheinungen gehören müssen, wenn das Strom- und Druckfeld sich einigermaßen längere Zeit unverändert erhält.

Auch für den Fall eines allmählich sich entwickelnden Druckgradienten und der dabei allmählich aufkommenden Luftströmung läßt sich in ganz ähnlicher Weise eine Grundlage ableiten. Setzt man den Druckgradienten, in der positiven y-Achse wirkend, gleich $G\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right)$, so entscheidet die Größe σ, wie rasch das Druckgefälle den Endwert G erreicht. Die Differentialgleichung der Bewegung ist nun mit $\frac{\varkappa}{\varrho} = a^2$:

V/19

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + G\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right)$$

mit den Randbedingungen: für $z = 0$ und für $t = 0$ soll $u = v = 0$ sein.

Tabelle 3.

Zeitliche Änderungen des Windvektors bei unvermittelt auftretendem Druckgradienten.

$\frac{z}{D}$	Pendelstunden													∞
	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	
						$\frac{\lambda}{G}u$								
0,03	0,0000	0,0797	0,1319	0,0945	0,0619	0,0892	0,1163	0,0930	0,0705	0,0909	0,1106	0,0922	0,0745	0,0939
0,1	0,0000	0,2721	0,4443	0,3245	0,2159	0,2976	0,3834	0,3056	0,2317	0,2994	0,3640	0,3033	0,2449	0,3055
0,3	0,0000	0,6741	1,1547	0,7971	0,4786	0,7522	1,0061	0,7761	0,5578	0,7604	0,9555	0,7719	0,5955	0,7715
0,5	0,0000	0,8808	1,5937	1,0600	0,5570	0,9929	1,4045	1,0308	0,6752	1,0051	1,3229	1,0236	0,7337	1,0000
1,0	0,0000	0,9865	1,9548	1,0768	0,2482	1,0045	1,7248	1,0554	0,4110	1,0191	1,6062	1,0485	0,5061	1,0432
1,5	0,0000	1,0000	1,9991	1,0204	0,0635	0,9821	1,8783	1,0217	0,1877	0,9866	1,7676	1,0167	0,2802	1,0000
						$\frac{\lambda}{G}v$								
0,03	0,0000	0,1387	0,0910	0,0520	0,0836	0,1123	0,0870	0,0632	0,0851	0,1058	0,0863	0,0678	0,0854	0,0852
0,1	0,0000	0,3996	0,2469	0,1178	0,2228	0,3186	0,2342	0,1552	0,2279	0,2969	0,2320	0,1704	0,2293	0,2257
0,3	0,0000	0,8090	0,3442	−0,0102	0,2948	0,5755	0,3264	0,0921	0,3068	0,5116	0,3195	0,1350	0,3100	0,3144
0,5	0,0000	0,9629	0,2868	−0,2988	0,1912	0,6430	0,2406	−0,1400	0,2100	0,5447	0,2298	−0,0730	0,2138	0,2078
1,0	0,0000	0,9936	0,0190	−0,8560	−0,0356	0,7343	0,0109	−0,6574	−0,0159	0,5982	0,0176	−0,5462	−0,0087	0,0000
1,5	0,0000	0,9998	0,0034	−0,9572	−0,0214	0,9062	0,0184	−0,8462	−0,0149	0,7871	0,0131	−0,7436	−0,0141	−0,0090

Setzt man in

$$\text{V/20} \qquad w = \left[u + \frac{G}{\lambda}\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right)\right] + i\left[v + \frac{G}{\lambda}\frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right],$$

dann gehen die Gleichungen V/19 in die Form V/21 über:

$$\text{V/21} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + i\lambda w = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Mit dem Ansatz $w = e^{-i\lambda t}\chi(z, t)$ wird aus ihr:

$$\text{V/22} \qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2},$$

für die eine Lösung mit den Randbedingungen:

$$\text{V/23} \qquad \begin{aligned} &\text{für } z = 0\text{: } \chi(0, t) = -\frac{G}{\lambda}\left[e^{i\lambda t}\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right) + i\frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right] \text{ und} \\ &\text{für } t = 0\text{: } \chi(z, 0) = -\frac{G}{\lambda}\frac{1+i\sigma}{1+\sigma^2} \end{aligned}$$

gesucht werden muß. Nach denselben Methoden wie im vorhergehenden Fall erhält man am Schluß die Lösung des Problems V/19 in der Form:

V/24

$$u + iv = \frac{G}{\lambda}\left[\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right) + i\frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right] - \frac{G}{\lambda}\left[\frac{1+i\sigma}{1+\sigma^2} e^{-i\lambda t} \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\frac{\varkappa t}{\varrho}}}\right)\right]$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{\frac{\varkappa t}{\varrho}}}}^{\infty} \left(e^{-\frac{i\lambda\varrho z^2}{4\varkappa\alpha^2}} - \frac{\sigma(\sigma - i)}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t} e^{-\left(i - \frac{1}{\sigma}\right)\frac{\lambda\varrho z^2}{4\varkappa\alpha^2}}\right) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Die Randbedingungen sind erfüllt; denn für $z = 0$ wird

$$u + iv = \frac{G}{\lambda}\left[\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right) + i\frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right] -$$

$$- \frac{G}{\lambda}\left[\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right) + i\frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right] = 0,$$

und für $t = 0$

$$u + iv = \frac{G}{\lambda}\left[\frac{1+i\sigma}{1+\sigma^2}\right] - \frac{G}{\lambda}\left[\frac{1+i\sigma}{1+\sigma^2}\right] = 0.$$

Außerdem geht die Beziehung V/24 für $\sigma = 0$ in die Beziehung V/16 und für $t = \infty$ in V/17 über. Schließlich kommt man aus V/24 für die beiden Geschwindigkeitskomponenten auf die Ausdrücke:

$$u = \frac{G}{\lambda}\left[\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t}\right) - \frac{\cos \lambda t + \sigma \sin \lambda t}{1+\sigma^2} \Phi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}} \frac{z}{D}\right) - \right.$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}} \frac{z}{D}}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}\left(t - \frac{\pi^2 z^2}{2\lambda D^2}\right)}\right) \cos \frac{\pi^2 z^2}{2\alpha^2 D^2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}\left(t - \frac{\pi^2 z^2}{2\lambda D^2}\right)} \sin \frac{\pi^2 z^2}{2\alpha^2 D^2} \right\} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] \qquad \text{V/25}$$

$$v = \frac{G}{\lambda}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}t} + \frac{\sin \lambda t - \sigma \cos \lambda t}{1+\sigma^2} \Phi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}} \frac{z}{D}\right) + \right.$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda t}} \frac{z}{D}}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}\left(t - \frac{\pi^2 z^2}{2\lambda D^2}\right)}\right) \sin \frac{\pi^2 z^2}{2\alpha^2 D^2} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\sigma}{1+\sigma^2} e^{-\frac{\lambda}{\sigma}\left(t - \frac{\pi^2 z^2}{2\lambda D^2}\right)} \cos \frac{\pi^2 z^2}{2\alpha^2 D^2} \right\} e^{-\alpha^2} d\alpha \right].$$

Diese Ausdrücke sind ziemlich komplizierter Natur und eine Deutung derselben läßt sich nur durch zahlenmäßige Durchrechnung einzelner Fälle geben. Die Lösung ergibt für größere Höhen graphische Darstellungen, ähnlich denjenigen in Abb. 6, die die Ausbildung eines Gradientstromes im Meer wiedergibt, wenn das Druckgefälle sich innerhalb eines Pendeltages bis zu 98% ausbildet. Diese Abbildung gilt für $h/D = 1$. Für die Atmosphäre wird für Höhen z, die gleich oder größer als D sind, der Kurvenverlauf von u und v nicht wesentlich davon abweichen.

VI. TRÄGHEITSSCHWINGUNGEN BEI MEERESSTRÖMUNGEN NACH DEN BEOBACHTUNGEN.

Obwohl von theoretischer Seite schon vor längerer Zeit (V. W. Ekman 1905) nachgewiesen worden ist, daß bei Meeresströmungen mit sehr großer Wahrscheinlichkeit und vielleicht auch recht häufig Trägheitsschwankungen in Richtung und Stärke zu erwarten sind, hat es lange gedauert, bis in ihnen rechtsdrehende Schwingungen (Nordhemisphäre) zur Beobachtung gelangten, denen der Charakter reiner Trägheitsschwingungen nicht abgesprochen werden kann. Der Grund hierfür ist wohl darin zu suchen, daß zum Nachweis solcher Schwankungen mehrtägige Strommessungen von einem verankerten Schiffe aus notwendig sind; derartige Messungen sind aber nur selten und immer mit großen technischen Schwierigkeiten verknüpft, die erst in neuerer Zeit einigermaßen überwunden werden konnten.

Die ersten Feststellungen dieser Art gehen jedenfalls auf Strommessungen zurück, die Bj. Helland-Hansen und V. W. Ekman 1930 im Nordostpassatgebiet des östlichen Atlantischen Ozeans vom Bord des For-

schungsschiffes „Armauer Hansen“ ausgeführt haben. Auf allen sechs hier durchgeführten Stationen sind in den Strommessungen Schwingungen ganz- und halbtägiger Periode und großer Amplitude vorhanden, die man natürlich in erster Linie den Gezeiten zuschreiben möchte. Bei der näheren Analyse haben sich aber, wie V. W. Ekman in einem vorläufigen Bericht 1939 mitteilt, Anzeichen gefunden, daß auf der Ankerstation mit der längsten Beobachtungsdauer (141 Beobachtungsstunden auf 30° 13′ N und 13° 51′ W) neben den Gezeitenperioden auch Schwankungen mit der theoretischen Periode der Trägheitsschwingungen (12 Pendelstunden) vorzukommen scheinen. Diese Periode beträgt in dieser Breite genau 23,844 mittlere Sonnenstunden; sie kommt allerdings der ganztägigen Mondperiode K_1 mit 23,93 Stunden recht nahe, aber bei fast 6 Perioden ist die gegenseitige Verschiebung der beiden Wellen immerhin fast eine halbe Stunde, so daß mit einiger Wahrscheinlichkeit feststellbar ist, welche Welle vorliegt. Bj. Helland-Hansen und V. W. Ekman deuten diese Schwingungen als rechtsdrehende Trägheitsbewegungen, und zwar waren während der ersten drei Tage die Schwingungen durch Reibung etwas gedämpft und in den letzten drei Tagen durch eine neu hinzukommende Störung in der Phase gegen früher etwas verschoben. Die harmonische Analyse ergab für beide Zeiträume (cm/sec):

$$\begin{aligned} N &= 1.88 \cos\left(\frac{\pi}{12}t - 112^0\right) \\ E &= 1.51 \sin\left(\frac{\pi}{12}t - 119^0\right) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} N &= 1.58 \cos\left(\frac{\pi}{12}t - 102^0\right) \\ E &= 1.29 \sin\left(\frac{\pi}{12}t - 97^0\right) \end{aligned}.$$

Der Phasenunterschied der beiden Komponenten entspricht in bester Weise dem theoretisch geforderten Wert; er ist für die ersten drei Tage 12 Minuten mehr, in den anderen drei Tagen 20 Minuten weniger als die geforderten 6 Stunden. Das Amplitudenverhältnis ist im Mittel 1,23; es soll theoretisch 1 sein. Wenn man bedenkt, daß neben der reinen Trägheitsbewegung wahrscheinlich auch die ganztägige Gezeitenperiode vorhanden gewesen sein dürfte und beide sich bei nahezu gleicher Phase überlagern, dann ist kaum eine bessere Übereinstimmung mit dem theoretisch geforderten Wert zu erwarten.

In der Ostsee haben auf Veranlassung von H. Petterson T. Gustafson und B. Kullenberg 1932 und 1933 Strommessungen längerer Dauer auf verschiedenen Stationen ausgeführt. Da in der Ostsee die Gezeitenströmungen völlig zurücktreten, konnten hier eventuell vorhandene Trägheitsschwingungen deutlicher in Erscheinung treten.

Tatsächlich ist nach den in den beiden Jahren gewonnenen Beobachtungen an dem Vorhandensein reiner Trägheitsbewegungen in diesen Strommessungen nicht zu zweifeln. Neben einigen anderen Fällen sind die charakteristischesten Messungen die vom 17. bis 24. Aug. 1933, bei denen ein photographisch registrierender Strommesser nach O. Petterson zwischen Gotland und dem Festland (57° 49′ N und 17° 49′ E) in einer Tiefe von 14 Meter durch 162 Beobachtungsstunden gearbeitet hat. Die Meerestiefe an dieser Stelle betrug 100 m; der Aufbau des Meeres zeigte zu dieser

Zeit eine gut ausgebildete Sprungschicht der Dichte in 25 m Tiefe mit einer fast homogenen Oberschicht, in deren Mitte (etwas unterhalb) sich der Strommesser befand. Die halbstündigen Stromregistrierungen wurden von den Verfassern in der Form eines progressiven Vektordiagramms wiedergegeben, das gleichzeitig unter der Voraussetzung eines gleichförmigen Geschwindigkeitsfeldes auch die Bahn eines einzelnen Wasserpartikels darstellt. Abb. 8 zeigt dieses Diagramm, das außerordentlich charakteristische rechtsdrehende Trägheitsschwankungen, einem nach NW gehenden Strome überlagert, aufweist. In anderer Form hat V. W. Ekman 1939 diese Trägheitsschwingungen verdeutlicht, indem er den Verlauf der Geschwindigkeitskomponenten gegen Norden und Osten darstellte. Die etwas ausgeglichenen Kurven sind in Abb. 9 wiedergegeben. Dieses Bild des Stromverlaufs erinnert an die früher theoretisch abgeleiteten Schwingungen der Geschwindigkeitskomponenten bei plötzlich aufkommendem Wind oder bei unvermittelt sich einstellendem Druckgefälle (siehe Abb. 5 u. 6). Die Periode ermittelt sich aus der harmonischen Analyse der Beobachtungen, wenn man die ersten Wellen der Erregungszeit ausschaltet, zu 14,0 Stunden, während 12 Pendelstunden 14,14 Stunden sind. Der

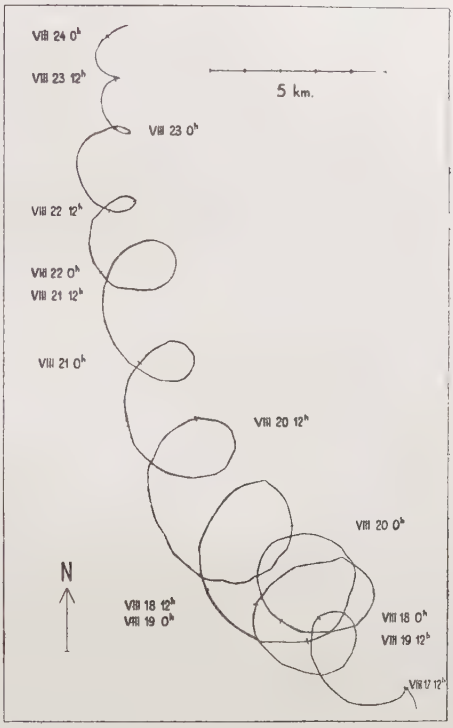

Abb. 8. Trägheitsschwingungen in der Ostsee in Hodographenform (nach Gustafson und Kullenberg).

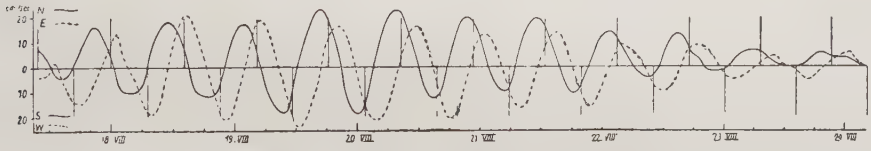

Abb. 9. Geschwindigkeitskomponenten der in Abb. 8 dargestellten Strömungen (nach V. W. Ekman).

Phasenunterschied ist fast genau eine Viertelstunde, die Amplituden entsprechender Teile sind einander fast gleich, so daß alle Eigenschaften reiner Trägheitsschwingungen in diesem Fall fast vollkommen erfüllt sind. Die Erregung dieser Trägheitsschwingungen ist wohl in Windböen zu suchen, die am 18. und 19. Aug. an der Südspitze von Gotland beobachtet worden sind, eventuell könnten auch Niveauverlagerungen der Meeresoberfläche, die mit

solchen Böen oft verbunden sind, hierzu Veranlassung gegeben haben. Bevor aber keine genaue Analyse aller in Betracht kommender Faktoren durch gleichzeitige Aufnahme derselben auf einem größeren Raume vorliegen, läßt sich über Erregungsursachen und über die die Erregung begleitenden Erscheinungen nichts Genaueres aussagen.

Anläßlich der Stromuntersuchungen in der Ostsee ist auch versucht worden, durch Gewinnung von gleichzeitigen Beobachtungen an mehreren Punkten zugleich einen Anhalt zu bekommen, wie groß die horizontale Ausbreitung der Trägheitsschwingungen sein könnte. Die wenigen Beobachtungen, die bisher vorliegen, geben noch kein eindeutiges Bild; jedenfalls aber zeigen sie, daß die Phase und Amplitude der Drehströme von Ort zu Ort verschieden sind und die Unterschiede auch nicht konstant bleiben. Es scheinen demnach dem Verfasser die Trägheitsschwankungen kein zusammenhängendes System über das betreffende Meer zu bilden (Ostsee), sondern mehr lokale Erscheinungen zu sein, die auch nicht durch die Küstenlinien eindeutig bestimmt sind.

Die 90stündige Ankerstation des Forschungsschiffes „Altair" am Nordrand des Hauptstromstriches des Golfstroms nördlich der Azoren (44° 33′ N und 33° 58′ W; 16. bis 20. Juni 1938) ergab einen neuen Fall ausgesprochener Trägheitsschwankungen innerhalb eines beständigen Stromes. Die Stromregistrierungen und die ozeanographischen Serienmessungen, von denen erstere in den acht Tiefen von 5, 15, 30, 50, 100, 300, 500 und 800 m gewonnen, letztere im einstündigen Intervall bis 800 m Tiefe ausgeführt wurden und bei deren Gewinnung ich selbst mitgearbeitet habe, ergaben ein ausgezeichnetes Material zur Untersuchung der während der Beobachtungszeit aufgetretenen Stromschwankungen. Die Strommessungen zeigten in allen Tiefen periodische Schwankungen, die aber in keiner Weise den Charakter reiner, gut ausgebildeter Gezeitenströme aufwiesen. Vielmehr scheinen diese Ströme während der ganzen Beobachtungszeit von einer anderen periodischen Schwankung überlagert, die eine ähnlich kurze Periode mit einer ebenso großen, wenn nicht noch größeren Amplitude aufweist. Die Analyse des Beobachtungsmaterials, die A. Defant 1939 vorgenommen hat, ergab, daß neben der halbtägigen Gezeitenperiode (12,3 Stunden) immer eine Schwankung mit der Dauer von 17 Stunden vorhanden war; sie hatte überall große Amplitude, aber in auffallender Weise in allen Tiefen eine mehr oder weniger andere Phase. Die Überlagerung einer 17-Stunden-Welle und der halbtägigen Gezeitenwelle von 12,3 Stunden Dauer führt zu Schwebungserscheinungen innerhalb der zusammengesetzten Welle. Nimmt man gleiche Amplituden für beide Wellen an, dann ergibt die Superposition

$$a \cos \frac{2\pi}{17} t + a \cos \frac{2\pi}{12.3} t = 2a \cos \frac{2\pi}{89.0} t \cos \frac{2\pi}{14.3} t,$$

also eine Welle mit einer Periode von 14,3 Stunden, deren Amplitude mit einer Periode von 44,5 Stunden = 1,86 Tagen zwischen den Werten 0 und 2a schwankt. Während der Beobachtungszeit von 90 Stunden = $3^3/_4$ Tagen muß es beim Vorhandensein der 17-Stunden-Welle wenigstens einmal zu einer solchen Schwebung kommen. Tatsächlich zeigen alle Strommessungen in

allen Tiefen eine mehr oder minder deutliche Welle von rund 14 Stunden Dauer; in charakteristischer Weise ist ihre Amplitude recht schwankend und ändert, wie es bei der Überlagerung der beiden Wellen sein muß, nach dem Amplitudenminimum ihre Phase. Die harmonische Analyse ergab neben der halbtägigen Gezeitenwelle, die uns hier nicht weiter interessiert, für die 17-Stunden-Welle folgende Werte:

Tabelle 4.

17-Stunden-Periode auf der Ankerstation des „Altair" 16.—20. Juni 1938.

Tiefe in m	N-Komponente		E-Komponente		Amplituden-Verhältnis N : E	Phase N + 4,25h	Unterschied gegen E
	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase			
5— 15	8,75	14,45	8,25	1,85	1,06 .	1,70	+ 0,15h
30—100	10,0	7,33	10,0	12,27	1,00	11,58	+ 0,69h
300—500	5,0	9,0	5,0	14,85	1,00	13,25	+ 1,60h
800	8,0	2,0	8,0	8,0	1,00	6,25	+ 1,75h
	cm/sec	Stunden	cm/sec	Stunden			

Die Abteilung der Schichten erfolgte in dieser Tabelle nach der Gleichartigkeit der Phase, die zwischen 15 und 30 m einerseits und zwischen 500 und 800 m andererseits einen Sprung um nahezu einer halben Periodenlänge (8½ Stunden) zeigt. Die Phasenwerte beziehen sich auf 0h M.G.Z. des 17. Juni 1938. Wenn man die Werte obiger Zusammenstellung überblickt, dann

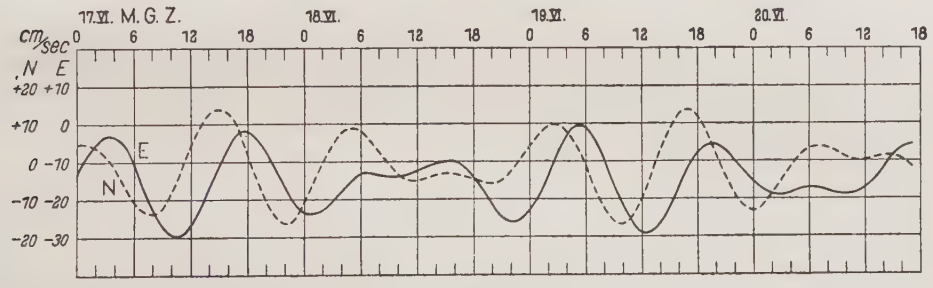

Abb. 10. Nord- und Ostkomponente des Stromes auf der „Altair"-Ankerstation nach den Werten der dynamischen Analyse für die Tiefenschicht 5—15 m (Reststrom + 17 Stunden Periode + 12,3 Stunden Periode).

zeigt sich, daß dieser 17 Stunden-Schwankung alle Eigenschaften zukommen, die zu einer reinen Trägheitsschwingung gehören. In der Breite $\varphi = 44^0\ 32'$ soll ihre Periode theoretisch 17,1 Stunden betragen. Die Übereinstimmung ist innerhalb der Möglichkeit der Bestimmung der Periodenlänge vollkommen. Die theoretische Forderung gleicher Amplitude beider Geschwindigkeitskomponenten ist ebenfalls erfüllt und ebenso die Forderung, daß die E-Komponente in ihrer Phase der N-Komponente um ein Viertel der Periode (4,25 Stunden) nachfolgt. Denn die Abweichung davon ist, wie die Tabelle zeigt, bis in 30 m Tiefe nur 9 Minuten, dann wird sie größer, bis 100 m etwa 0,7 Stunden, was nur 15^0 in den Phasenwerten der harmonischen

Analyse bedeutet. In den tieferen Schichten ist der Unterschied etwas größer, was aber bei der unsicheren Analyse von Strommessungen bei zweistündigem Intervall derselben nicht zu verwundern ist.

Als Beispiel dafür sei in Abb. 10 der Verlauf der N- und E-Komponente des Stromes für die Schicht 5—15 m wiedergegeben, wie er sich nach den Werten der harmonischen Analyse durch die Überlagerung des Reststroms mit den beiden Wellen von 12,3 und 17-Stunden-Periode darstellt. Man erkennt in beiden Komponenten die obenerwähnten Schwebungserscheinungen und weiter trotz der Gezeitenkomponente dort, wo die Amplitude der Superposition größer ist, die für die Trägheitsschwingungen charakteristische Verspätung der E-Komponente um eine Viertel-Periode gegenüber der N-Komponente.

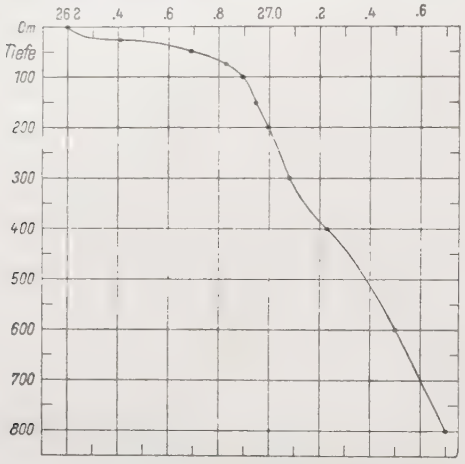

Abb. 11. Mittlere vertikale Dichteverteilung auf der Ankerstation des „Altair" (17. bis 20. Juni 1938). (Werte für σ_t.)

Es unterliegt keinem Zweifel, daß diese 17-Stunden-Schwankung eine Trägheitsschwingung innerhalb des Golfstromes ist. Die Schwankungen scheinen während der 3½ Tage von fast unverminderter Intensität gewesen zu sein, denn eine Dämpfung, ähnlich wie sie etwa in dem früher besprochenen Fall in der Ostsee aufgetreten ist, war nicht nachzuweisen.

Die Trägheitsschwingungen haben den ganzen Strom in der ganzen Wassermasse bis 800 m Tiefe — so weit haben die Beobachtungen gereicht — erfaßt. Aber sowohl ihre Phase als auch ihre Amplitude sind in den verschiedenen Tiefen nicht dieselben, wie es z. B. bei Trägheitsschwankungen in Trift- und Gradientströmen eines homogenen Meeres theoretisch der Fall sein müßte. Um diesen auffallenden Aufbau dieser Trägheitsschwingungen zu verstehen, muß man die vertikale Verteilung der Dichte auf dieser Ankerstation heranziehen. Sie ist in Abb. 11 gegeben. Man erkennt, daß von der Oberfläche an die Dichte sehr rasch mit der Tiefe bis etwa 80 m zunimmt, worauf die Zunahme nach unten sich wesentlich verlangsamt. Die größte vertikale Dichteänderung ist etwas oberhalb 30 m zu finden. Hier liegt also die Mitte der Sprungschicht, und gerade diese Tiefe zeigt auch den Sprung in der Phase der Trägheitsschwingungen. Die Oberschicht (Strommessungen in 5 und 15 m) hat in der N-Komponente die Phase 14,45^h, in der E-Komponente 1,85^h, die Unterschicht (Strommessungen in 30, 50 und 100 m) hingegen 7,33^h bzw. 12,27^h. Der Unterschied beträgt im Mittel der beiden Komponenten 8,8 Stunden, so daß Ober- und Unterschicht gerade inversen Verlauf zeigen. Der Übergang von der einen zur anderen Phase muß ziemlich unvermittelt zwischen 15 und 25 m Tiefe erfolgen, also gerade dort, wo die stärkste vertikale Dichteänderung besteht. Bis 500 m ändert sich

dann die Phase nur wenig, aber die Werte in 500 m zeigen gegenüber denen in 800 m Tiefe eine neuerliche Änderung, die im Mittel der beiden Komponenten wieder 8,4 Stunden, also fast wieder eine halbe Periodendauer erreicht. Ob diese Änderung zwischen 500 und 800 m Tiefe irgendwo sprunghaft vor sich geht, läßt sich nicht sagen, da nur Messungen aus diesen beiden Tiefen vorliegen.

Dieses merkwürdige Verhalten der Trägheitsschwingungen ist bisher noch nie beobachtet worden und läßt sich, wie A. Defant annimmt, vielleicht verstehen, wenn man die Trägheitsschwingungen in mehrfach geschichtetem Meer als innere Wellen auffaßt; denn nur bei solchen findet man derartig rasche Phasenänderungen, die mit entsprechender Dichteänderung in der Vertikalen verknüpft sind. Auf jeden Fall steht es aber fest, daß auch im freien Ozean in den Meeresströmungen durch irgendwelche Störungen Trägheitspendelungen in der Stromrichtung und in der Stromstärke vorkommen, und schon dieser erste Fall von längerdauernden Strommessungen auf einer Station etwas höherer Breite bestätigt den von V. W. Ekman aus theoretischen Überlegungen gezogenen Schluß, daß bei der Analyse und Diskussion solcher Strommessungen Komplikationen dadurch auftreten können, daß zu den gesetzmäßig sich abwickelnden Gezeitenströmen mehr zufällig auftretende Trägheitsbewegungen ähnlich langer Periode kommen und das Bild verwirren. Auf diese Störungen ist dann besonders zu achten, will man allmählich aus Strommessungen bei steigender Anzahl der Ankerstationen über den Verlauf der Gezeitenströme im freien Ozean etwas aussagen.

VII. TRÄGHEITSSCHWINGUNGEN IN DEN LUFTSTRÖMUNGEN NACH DEN BEOBACHTUNGEN.

Während der Nachweis über das Auftreten von Trägheitsbewegungen in den Meeresströmungen als erbracht angesehen werden kann, ist bisher in der Meteorologie nicht einmal der Versuch gemacht worden, nachzusehen, ob in den Windregistrierungen wenigstens Andeutungen von Trägheitsschwingungen zu finden sind. Eigentlich sind gar keine triftigen Gründe anzuführen, daß solche rechtsdrehende Trägheitsschwingungen unter bestimmten Umständen im Winde nicht vorkommen sollen, ja vom theoretischen Standpunkt aus sind sie geradezu zu fordern. Man hat zwar darauf hingewiesen, daß periodische Schwankungen der Windrichtung in der Form von Wellen in der Richtung der Stromlinien vorkommen und namentlich, F. M. Exner (1919) hat sich in theoretischer Hinsicht eingehend mit oszillatorischen Strömungen in der Atmosphäre befaßt; er hat hierbei auf Untersuchungen J. W. Sandströms (1910) Bezug genommen, in denen im Stromfeld der Wetterkarten oszillierende Stromlinien als relativ häufig auftretend nachgewiesen werden. Aber in diesen Arbeiten wird nirgends darauf hingewiesen, daß eine der wahrscheinlichsten und deshalb auch häufigsten Perioden dieser Oszillationen doch die Trägheitsperiode von 12 Pendelstunden sein müßte; es wurde aber überhaupt nicht der Versuch unternommen, die

Periode der Schwingungen, die man gefunden hatte, zu ermitteln. Man hat sich mit der Tatsache, daß solche Oszillationen vorkommen, begnügt.

Da zu erwarten ist und aus der Erfahrung demnach bekannt ist, daß in der Atmosphäre die horizontalen Wellenbewegungen zweifellos gegenüber der völlig geradlinigen Strömung häufiger sein werden und solche horizontale Wellen durch die ablenkende Kraft der Erdrotation genau so wie die vertikalen Wellen durch die Schwere erhalten werden, wird man solche Schwingungen, die natürlich mit der Trägheitsperiode von 12 Pendelstunden erfolgen, dort am ehesten finden, wo eine längere Zeit hindurch eine im großen gesehen, mehr konstante Luftströmung (konstanter Richtung und Stärke) vorhanden ist. Eine Durchsicht der Windregistrierungen des meteorologischen Observatoriums Potsdam (52° 23′ N, 13° 04′ E, Höhe des Anemographen 41 m auf dem Telegraphenberg) zeigte sogleich, daß in solchen Zeiten die Windrichtung und die Windstärke Pulsationen unterliegt, deren Schwankungsdauer bei 15—16 Stunden liegt. Die Periode der Trägheitsschwingungen beträgt bei $\varphi = 52^0\ 23'$ N 15,15 Stunden. Oft stellte es sich heraus, daß durch mehrere Perioden hindurch diese Schwankungen deutlich hervortraten, dann wieder bei stärkerem Wechsel der Windstärke und Windrichtung verschwanden, um später nach Beruhigung der Wetterlage wieder zu erscheinen. Im folgenden werden die Analysen-Ergebnisse mehrerer solcher Fälle mitgeteilt werden, auf welche Weise die Analyse durchgeführt wurde und wie ihr Ergebnis zu deuten ist.

1. Der Fall: Windregistrierungen von Potsdam, 12. bis 18. Jan. 1933.

Ich wähle zunächst den ersten Fall, den ich untersucht habe. Er betrifft die Windregistrierungen in Potsdam in der Zeit vom 12. Jan. 0^h bis 18. Jan. 1933 24^h, die in den „Ergebnissen der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam" des betreffenden Jahres veröffentlicht worden sind. Insgesamt sind es 7 Tage = 168 Stunden, während denen eine gleichförmige Luftbewegung bzw. Strömung im Mittel aus ESE mit einer mittleren Stärke von 4,8 m/sec registriert wurde. Die Extreme waren in der Windstärke 7,9 und 2,7 m/sec, während nur durch wenige Stunden neben ESE die Richtung E angegeben wird.

Zur Reduktion der Anemographenaufzeichnungen und der Veröffentlichung ihrer Ergebnisse ist für die ganzen folgenden Ausführungen zu bemerken, daß die mitgeteilten Werte der Windrichtung und Windstärke Mittelwerte für je eine Stunde sind und die mittlere Windgeschwindigkeit auf ein Zehntel m/sec angegeben wird. Die Windrichtung wird nach der 16teiligen Windrose mitgeteilt; das Azimut der Windrichtung ist demnach bloß auf $\pm 11\frac{1}{2}^0$ genau.

Auf die 7 herangezogenen Tage entfallen 11 volle Perioden zu je 15,15 Stunden mit insgesamt 166,6 Stunden. Wenn man die Werte dieser Tage näher ansieht, dann erkennt man, daß in der Windstärke eine Schwankung von rund 15 Stunden ohne Zweifel vorhanden ist. Ordnet man die Werte nach einer Periode von 15 Stunden und nimmt in Anbetracht, daß die Periode genau 15,15 Stunden sein soll, die 8. Stunde der 4. Periode sowie die 7. Stunde

der 11. Periode doppelt und bildet die Mittel aller Perioden, dann erhält man folgende Zahlenreihe:

Potsdam, 12. bis 18. Jan. 1933.

Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Schwankung
m/sec	4.87	**5,33**	5,25	5,15	4,98	5,02	5,01	4,93	4,55	4,50	4,23*	4,58	4,65	4,57	4,82	1,10

Die große Schwankung von 1,1 m/sec zeigt wohl, daß etwas Reelles an dieser Periode sein muß. Aber der Verlauf der Einzelperioden weist darauf hin, daß am Ende der 7. Periode ein Phasensprung von etwa 3—4 Stunden erfolgt sein muß, denn sonst wäre die Schwankung im Mittel noch etwas höher ausgefallen. Zur weiteren Analyse wollen wir uns deshalb auf die ersten 6 Perioden vom 12. Jan. 2—3^h bis 16. Jan. 21—22^h beschränken.

Das Beobachtungsmaterial, geordnet in Zeilen zu je 15 Stunden mit einem Doppelwert an der 6. Stunde der 4. Periode, steht in Tab. 5 (S. 48).

Von den zwei angegebenen Richtungen ist zunächst die obere als die in der Veröffentlichung angegebene zu betrachten.

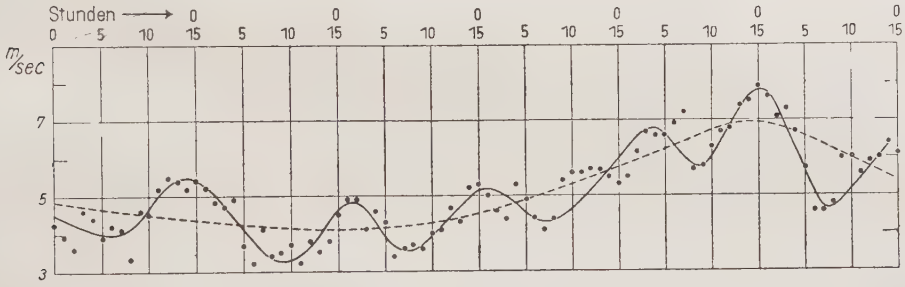

Abb. 12. Verlauf der Windstärke (ohne Rücksicht auf die Windrichtung) in Potsdam, 12. bis 18. Juni 1933.

Die Abb. 12 gibt den Verlauf der Windstärke ohne Rücksicht auf die Windrichtung. Legt man durch die Punktfolge nach Augenmaß eine Kurve so erscheint die 15-Stunden-Periode in voller Deutlichkeit; nur in der 4. Periode scheint eine Störung vorzuliegen, die vielleicht an das Auftreten reiner Ostwinde gebunden ist.

Ermittelt man nun die N- und E-Komponente (u und v) nach den angegebenen Windrichtungen für jede Stunde und berechnet man durch Mittelbildung den mittleren Verlauf derselben für eine ganze Periode, analysiert dann das Ergebnis nach dem harmonischen Verfahren, so erhält man die Werte:

$$N = +2{,}05 + 0{,}10 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 313^0\right)$$

$$E = -4{,}63 + 0{,}56 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 95^0\right).$$

Tabelle

Windregistrierungen von Potsdam

Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7
1. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	SE	ESE	ESE	ESE
	ESE 4,2	ESE 3,9	ESE 3,6	ESE 4,6	SEzS 4,4	ESE 3,9	SEzS 4,2	ESE 4,1
2. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	SE	SE	SE
	ESE 5,4	ESE 5,2	ESE 4,8	ESE 4,7	ESE 4,9	SEzE 3,7	SE 3,2	SE 4,1
3. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	ESE 4,5	ESE 4,9	ESE 4,9	ESE 4,1	ESE 4,6	ESE 4,3	SEzE 3,4	SEzE 3,6
4. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	E	E
	ESE 5,3	ESE 5,0	ESE 4,6	SEzE 4,4	ESE 5,3	ESE 4,9	EzS 4,9	EzS 4,1
5. Periode	E	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	EzS 5,3	ESE 5,5	SEzE 6,2	SEzE 6,7	SEzE 6,6	SEzE 6,6	SEzE 6,9	ESE 7,2
6. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	ESE 7,9	ESE 7,6	SEzE 7,1	SEzE 7,3	SEzE 6,7	SEzE 5,7	SEzE 4,6	SEzE 4,6

Das Ergebnis ist nicht sehr befriedigend; denn das Verhältnis der Amplituden ist bloß 0,18 und sollte 1 sein, der Phasenunterschied der beiden Komponenten, der theoretisch ein Viertel der Periode, d. i. 3,8 Stunden bzw. 90° betragen sollte, ist um 52° zu klein, was fast 2 Stunden zu wenig ist. Aber bei der Bearbeitung des Falles ist einem sofort aufgefallen, daß die Windrichtung lange Zeit hindurch fast gar keine Änderung aufweist, solche aber mit den Schwankungen der Windstärke gewiß vorhanden gewesen sein müssen; sie dürften deshalb in den Reduktionstabellen nicht erscheinen, weil

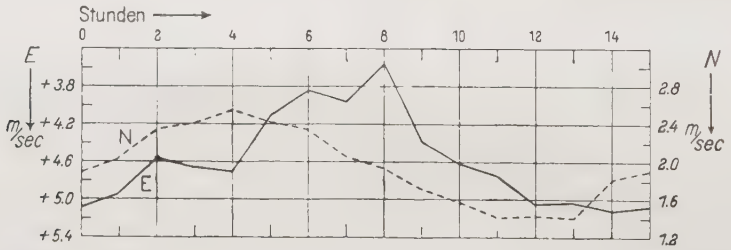

Abb. 13. Mittlerer Verlauf der N- und E-Komponente während der 15-Stunden-Periode.

die Schwankung wahrscheinlich kleiner als $22\frac{1}{2}^0$ in der Richtung gewesen sein wird, somit in der 16teiligen Windrose innerhalb einer Richtung bleibt. Weiter ist aufgefallen, daß der Übergang von einer Richtung in eine andere zumeist durch Angabe der Stundenmittelwerte und durch Angabe in der 16teiligen Windrose zu sprunghaft erfolgt, was in Wirklichkeit im allgemeinen nicht der Fall sein dürfte. Eine genauere Reduktion der Anemographenaufzeichnungen wäre deshalb für diesen Zweck erforderlich. Aber man konnte sich helfen, daß man in der Windrichtung, um die Sprünge in den Komponenten auszugleichen und den Verlauf derselben gleichmäßiger zu gestalten, Verschiebungen der angegebenen Richtung um höchstens $11\frac{1}{2}^0$ zuläßt und auf diese Weise eine Art „Windreduktion" anbringt, die immer noch die beobachteten Werte innerhalb der Veröffentlichung völlig genau wiedergibt. Die „reduzierten" Werte der Windrichtung stehen in obiger

5.

12. Jan. 2—3h bis 18. Jan. 22—23h 1933.

Stunden	8	9	10	11	12	13	14	15
1. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	SEzS 3,3	ESE 4,6	ESE 4,5	EzS 5,2	EzS 5,5	EzS 5,4	ESE 5,2	ESE 5,4
2. Periode	SE	SE	SE	SE	ESE	ESE	ESE	ESE
	SE 3,4	SEzE 3,5	SEzE 3,7	SEzE 3,2	ESE 3,8	ESE 3,5	ESE 3,8	ESE 4,5
3. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	SEzE 3,7	ESE 3,6	ESE 4,0	ESE 4,1	ESE 4,7	ESE 4,3	ESE 5,2	ESE 5,3
4. Periode	E	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	E
	EzS 4,4	EzS 5,4	EzS 5,6	EzS 5,6	EzS 5,7	EzS 5,7	ESE 5,5	EzS 5,3
5. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	ESE 5,7	ESE 5,8	ESE 6,3	ESE 6,7	ESE 6,8	ESE 7,4	ESE 7,5	ESE 7,9
6. Periode	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE	ESE
	SEzE 4,8	ESE 6,0	EzS 6,0	EzS 5,6	EzS 5,9	EzS 6,0	EzS 6,4	ESE 6,1

Tabelle bei jeder Stunde an zweiter Stelle, und ein Vergleich mit den Werten darüber zeigt, daß in diesem Fall besondere Verschiebungen nicht nötig waren, um einen glatteren Verlauf der beiden Geschwindigkeitskomponenten zu erhalten.

Mit diesen reduzierten Windrichtungen wurden neuerdings die N- und E-Komponente und dann ihr mittlerer Verlauf während einer vollen Periode ermittelt. Diese Werte stehen in folgender Tab. 6, ihre graphische Darstellung in Abb. 13.

Mittlerer Verlauf der N- und E-Komponente während der 15-Stunden-Periode in m/sec. Potsdam, 12. bis 18. Jan. 1933.

Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7
E-Komponente .	−5,07	−4,93	−4,57	−4,66	−4,70	−4,10	−3.84	−3,96
N-Komponente .	1,91	2,04	2,34	2,41	**2,55**	2,43	2,34	2,06

Stunden	8	9	10	11	12	13	14	Schwankung
E-Komponente .	**−3,57**	−4,38	−4,61	−4,74	−5,05	−5,03	−5,12*	1,55
N-Komponente .	1,94	1,71	1,58	1,42*	1,42	1,42	1,83	1,13

Schon aus diesen Zahlenreihen ersieht man, daß die Eigenschaften der Trägheitsbewegung jetzt viel deutlicher erfüllt sind als früher. Dem Maximum bzw. Minimum der N-Komponente folgt jenes der E-Komponente in 3 bzw. 4 Stunden, das Intervall ist im Mittel 3,5 Stunden, theoretisch soll es 3,8 Stunden sein. Da nur Stundenwerte vorliegen, kann die Übereinstimmung nicht besser ausfallen, während das Amplitudenverhältnis mit 0,73 noch etwas zu klein ist. Nichts anderes ergibt natürlich die harmonische Analyse der obigen Zahlenreihen:

$$N = +2{,}01 + 0{,}50 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 8{,}1^0\right)$$

$$E = -4{,}61 + 0{,}61 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 66{,}8^0\right).$$

Der Phasenunterschied, der 90° sein sollte, ist bloß 58,7°, es fehlen somit 31,3°, das Amplitudenverhältnis ist 0,82. In Abb. 14 ist noch der ganze Verlauf der N- und E-Komponente dargestellt. In der Form, wie er hier gegeben ist, muß, wenn es sich um Trägheitsschwingungen handeln soll,

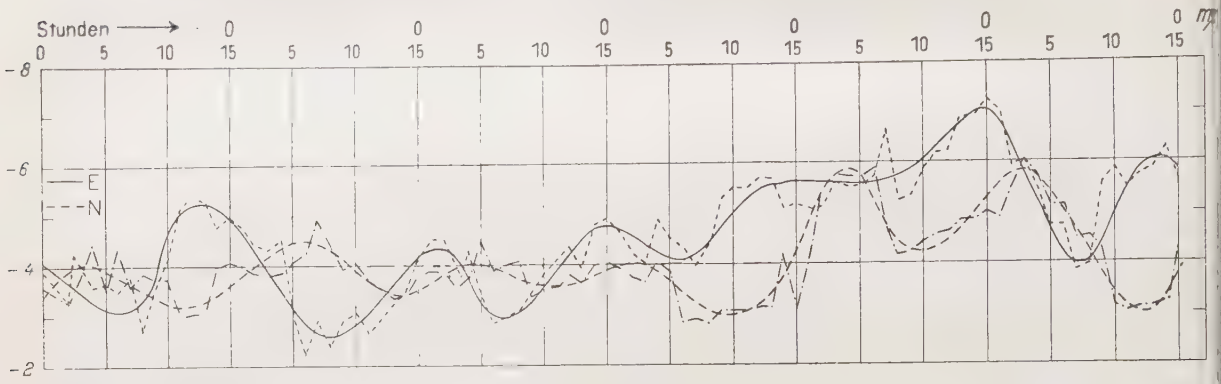

Abb. 14. Verlauf der Nord- und Ost-Komponente der Windgeschwindigkeit während 6 Trägheitsperioden in Potsdam, 12. bis 18. Juni 1933.

das Minimum der Nordkomponente dem Minimum der E-Komponente bzw. das Maximum der N-Komponente dem Maximum der E-Komponente um ein Viertel der Periode nachfolgen, was doch in recht klarer Weise längs des ganzen Verlaufs der Kurve der Fall ist.

Tabelle 7. Trägheitsschwingungen in den Wind-

Nr.	Zeit	Periodenzahl	Extreme Windrichtung	Windstärke m/sec		Zeitunterschied des Eintritts Max.–Min. (in Stunden)			Zeitunterschied	
				Maximum	Minimum	Windstärke allein	N	E	Max. N — Max. E	Min. N — Min. E
I	12. 1. 0h bis 18. 1.24h 1933	6	E–SE	7,9	3,2	8	8–9	8	7	8
		6	E–SE	7,9	3,2	8	7	6	4	3
II	9. 3.17h bis 13. 3.11h 1933	6	SSW–ESE	6,7	0,9	9	8–9	8	3	4
		6	SSW–ESE	6,7	0,9	9	8	7	4	4
III	23. 1.16h bis 26. 1.19h 1933	5	ENE–ESE	6,7	3,6	10	8	10	5	6
IV	4. 3. 3h bis 5. 3.24h 1932	3	SSW–ESE	5,6	2,1	8	9	6	4	1
V	25. 1.14h bis 29. 1. 8h 1932	6	NW–SSW	7,0	2,5	6	9	8	2	1
		6	NW–SSW	7,0	2,5	6	8	8	3	3
VI	25.10. 3h bis 26.10.24h 1911	3	SE–WSW	8,7	3,7	8	9	9	2	2
		3	SE–WSW	8,7	3,7	8	7	8	3	4
VII	25. 6. 2h bis 26. 6. 6h 1910	3	SSW–WSW	8,2	2,5	6	9	10	6	7
VIII	6. 6. 8h bis 10. 6. 5h 1911	7	W–N	9,4	1,3	8	10	6	2	6
IX	28. 6.21h bis 30. 6.18h 1910	3	W–SSW	10,7	3,6	8	7	7	5	5
X	8. 4. 5h bis 10. 4. 2h 1909	3	W–NNW	8,6	3,2	7	7	6	3	4
XI	15. 2. 3h bis 17. 2. 1h 1909	3	W–NW	11,5	5,0	7	7	3	0	4
		3	W–NW	11,5	5,0	7	7	6	3	4
XII	12. 7. 1h bis 13. 7.22h 1909	3	WSW–WNW	9,3	4,0	6	6	9	3	3 (7)
	12 Fälle	51					7,75	7,42	3,75	4,17
	(im Mittel = 4,3)									

Überblickt man das Ganze, so scheinen mir keine Zweifel zu bestehen, daß in den Schwankungen, die im Winde zwischen dem 12. und 18. Jan. 1933 in Potsdam aufgetreten sind, höchstwahrscheinlich reine Trägheitsschwankungen vorliegen, die anfangs scheinbar an Amplitude etwas abnehmen, im letzten Drittel der Beobachtungsszeit bei Zunahme der Windstärke aber an Intensität wachsen.

2. Weitere Fälle aus den Windregistrierungen in Potsdam.

Nach der im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Methode wurden noch weitere 11 Fälle der Windregistrierungen in Potsdam analysiert, so daß im ganzen 12 solcher Fälle zur Verfügung stehen. Die Zahl der Fälle ließe sich beliebig vermehren, aber es schien diese Zahl der untersuchten Fälle zur Klärung der Sachlage zu genügen. Bei 4 der 12 Fälle schien es zweckmäßig, die obenerwähnte „Windreduktion" vorzunehmen. In der folgenden Tab. 7 sind alle Angaben enthalten, die notwendig zur Charakterisierung jedes einzelnen Falles sind. Schließlich wurden in der untersten Zeile der Tabelle für jene Größen, die besonderes Interesse beanspruchen und sich mitteln lassen, Mittelwerte gerechnet.

Aus dieser Tabelle können wir folgendes entnehmen: Die Zahl der Perioden, die den einzelnen Fällen zugrunde liegt, schwankt zwischen 7 und 3; am häufigsten erscheinen die Trägheitsschwingungen in 3 oder 4 aufeinanderfolgenden Perioden; dann wird entweder ihre Amplitude so gering, daß sie

registrierungen von Potsdam (Periode = 15,15 Std.).

Schwankung m/sec			Harmonische Analyse				Amplitudenverhältnis	Phasenunterschied	Phasenunterschied	Anmerkungen
			Nordkomponente		Ostkomponente					
Windstärke	N	E	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase	Nord zu Ost	E–N	E–N gegen 90°	
1,40	0,33	1,40	0,10	313,0°	0,56	95,0°	0,18	+ 142,0°	— 5,2°	
—	1,33	1,55	0,50	8,1°	0,61	66,8°	0,82	58,7°	+ 31,3°	Windreduktion
1,70	1,60	1,59	—	—	—	—	—	—	—	
—	1,43	2,11	0,63	16,7°	0,89	103,0°	0,71	86,3°	+ 3,7°	Windreduktion
2,30	1,66	0,49	0,38	24,6°	0,11	123,7°	3,45	99,1°	— 9,1°	
1,20	0,73	2,47	0,24	301,0°	0,72	17,7°	0,33	76,7°	+ 13,3°	
1,30	1,65	1,41	—	—	—	—	—	—	—	
—	0,72	1,38	0,30	302,7°	0,67	1,7°	0,44	59,0°	+ 31,0°	Windreduktion
2,30	2,26	6,01	0,61	341,9°	1,66	40,1°	0,37	58,2°	+ 31,8°	
—	2,16	4,96	0,93	318,9°	2,11	41,2°	0,44	82,3°	+ 7,7°	Windreduktion
1,46	2,62	2,49	0,73	232,8°	0,49	338,6°	0,67	105,8°	— 15,8°	
0,87	1,62	1,76	0,42	43,1°	0,54	105,1°	0,78	62,0°	+ 28,0°	
1,71	2,49	2,72	1,08	209,4°	1,20	308,0°	0,90	98,6°	— 8,6°	
2,56	2,32	3,74	0,70	20,0°	1,10	92,6°	0,64	72,6°	+ 17,4°	
2,16	2,54	2,65	0,56	341,4°	0,97	32,4°	0,57	51,0°	+ 39,0°	
—	3,05	2,65	0,98	321,6°	0,99	33,0°	0,99	71,4°	+ 18,4°	
2,03	1,57	2,22	0,52	340,9°	0,45	100,9°	1,16	120,0°	— 30,0°	
	N : E = 0,95						0,94	82,7°	+ 7,3°	

bei der angegebenen Art der Windreduktion sowohl bei der Windgeschwindigkeit, wie bei der Windrichtung nicht mehr genügend hervortreten oder es tritt eine Phasenverschiebung bzw. eine derartige Änderung des ganzen Stromfeldes auf, daß sich alles verwischt.

Die untersuchten Fälle verteilen sich auf alle Windrichtungen; inwiefern eine Beziehung zu der Wetterlage besteht, darauf wird in einem besonderen Abschnitt eingegangen (Abschnitt 5, S. 60).

Für die Frage, ob die beobachteten Schwankungen 15stündige Trägheitsschwingungen sind, ist die Verschiebung der beiden Komponenten gegeneinander von Wichtigkeit. Es zeigt sich, daß im Mittel das Maximum der E-Komponente dem Maximum der N-Komponente in 3,75 Stunden, das Minimum der E-Komponente dem Minimum der N-Komponente in 4,17 Stunden folgt; im Mittel beträgt demnach die Verschiebung der Extreme 3,96 Stunden gegen 3,79 Stunden der Theorie. Das Verhältnis der Schwankung der N-Komponente zur E-Komponente beträgt im Mittel 0,95 gegen 1 nach der Theorie.

Schon diese rohen Werte, die aus dem ursprünglichen Material abgeleitet sind, geben eine recht gute Übereinstimmung mit der Theorie. Präziser lassen sich die Verhältnisse durch die harmonische Analyse der beiden Komponenten erfassen, wenn auch das Ergebnis nicht wesentlich anders ausfällt. Das Verhältnis der Amplituden der beiden Komponenten bleibt im Mittel dasselbe, nämlich gleich 0,94. Wenn man aber die Einzelwerte der Tabelle durchsieht, sieht man, daß alle bis auf zwei kleiner als 1 sind. Der eine Wert ist abnorm groß. Läßt man ihn weg, so ist das Mittel 0,72, und zwar ist die N-Komponente kleiner als die E-Komponente. Die Bewegung wäre demnach, wenn das Resultat nicht auf Zufall beruht, nicht kreisförmig, sondern elliptisch.

Der Phasenunterschied zwischen der E- und N-Komponente ist im Mittel aller Fälle 82,7° gegen 90° nach der Theorie. Die Abweichung von 7,3°, der 20 Zeitminuten entsprechen, ist, wenn man bedenkt, daß die Ausgangswerte Stundenmittel sind, bedeutungslos. Im einzelnen sind die Abweichungen natürlich größer; die extremen sind + 39° und — 30°, d. i. + 1,6 und — 1,2 Stunden.

Faßt man das Ergebnis aller Fälle zusammen, so lassen sie den Schluß zu, daß in den Windregistrierungen von Potsdam tatsächlich Trägheitsschwingungen nicht selten auftreten, die sich, wenn sie durch andere Störungen, d. h. raschere Änderungen des Druckfeldes, nicht überdeckt werden, auch durch mehrere Perioden erhalten können. Es wäre von Interesse, einzelne der Fälle in Details zu verfolgen und zu diskutieren. Aber dies würde die Wiedergabe zahlreicher Diagramme und Tabellen erfordern. In den meisten Fällen ist es so, daß die Trägheitsschwingungen länger dauernden Schwankungen vielleicht unperiodischer Natur überlagert sind. Will man erstere rein haben, so muß man letztere ausschalten. Dies macht man am besten dadurch, daß man durch Bildung übergreifender Mittel über 15 Werte zunächst die Schwingungen dieser Dauer eliminiert und den so erhaltenen glatten Verlauf der länger dauernden Windänderungen von den Originalwerten subtrahiert. Die Restbeträge enthalten dann die 15stündige Schwingung allein. Dasselbe läßt sich übrigens mit fast demselben Effekt auch

erreichen, indem man durch die Einzelwerte im Diagramm eine nach Augenmaß gezeichnete Mittellinie zieht und die Abweichungen von dieser Linie ermittelt. Wenigstens für einen Fall sei in Abb. 15 der auf diese Art und Weise erhaltene Verlauf der N- und E-Komponente während der 6 Perioden

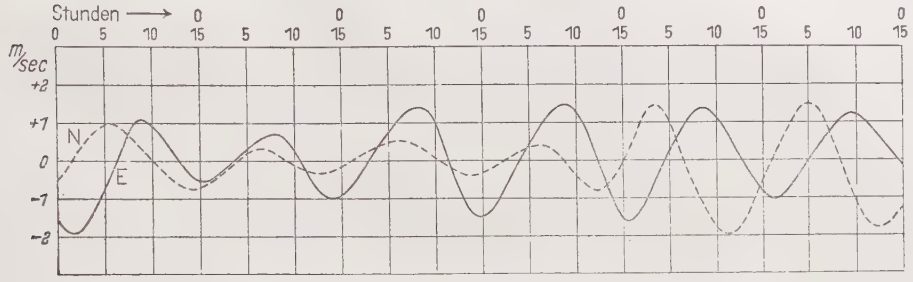

Abb. 15. Verlauf der Nord- und Ost-Komponente der Windgeschwindigkeit in Potsdam 1933: 9. März 16—17^h bis 13. März 10—11^h, dargestellt in Abweichungen von der Mittellinie.

dieses Falles wiedergegeben. Er zeigt uns mit einem Blick, daß die Schwankungen im wesentlichen den charakteristischen Eigenschaften der Trägheitsschwingungen folgen und so zum Schluß berechtigen, daß Trägheitsschwingungen im Windfeld in diesem Falle durch fast 91 Stunden, d. i. durch fast 4 Tage, vorhanden waren.

3. Drei Fälle in den Windregistrierungen von Wien, Hohe Warte.

Die geographischen Koordinaten der meteorologischen Zentralanstalt in Wien sind 48^0 15′ N und 16^0 22′ E; die Höhe des Anemographen ist 238,5 m und 36 m über dem Erdboden. Trägheitsschwingungen haben in dieser Breite die Periode von 16,08 Stunden. Die Windregistrierungen sind in den Jahrbüchern der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik durch Angabe der Windwege in km/Stunde und der mittleren stündlichen Windrichtung nach der 16teiligen Windrose veröffentlicht. Um auch für andere Stationen den Nachweis zu erbringen, daß in den Windschwankungen Trägheitsschwingungen vorhanden sind, wurden aus dem Jahrgang 1915, der mir gerade zur Verfügung stand, ohne langes Suchen drei Fälle herausgesucht, die nach der früher benutzten Methode analysiert wurden. Das Ergebnis steht in Tab. 8, die auf dieselbe Weise wie die für Potsdam angelegt ist (S. 54).

Die Diskussion kann sehr kurz gehalten werden, da sich die Fälle genau an die früheren Ergebnisse anschließen. Jetzt geht das Amplitudenverhältnis der N- und E-Komponente im Mittel etwas über 1 hinaus; der Mittelwert der Phasenverschiebung ist 83,4^0 und nur 6,6^0 kleiner als der theoretische Wert. Auch in den Einzelwerten sind die Abweichungen von derselben Größenordnung.

Man kann also auch aus diesen Fällen der Windregistrierungen von Wien mit großer Wahrscheinlichkeit den Schluß ziehen, daß die Schwankungen in ihnen Trägheitsschwingungen eines aus dem Gleichgewicht ge-

Tabelle 8. Trägheitsschwingungen in den Wind-

Nr.	Zeit	Periodenzahl	Extreme Windrichtung	Windstärke km/Std.		Zeitunterschied des Eintritts Max.–Min. (in Stunden)			Zeitunterschied	
				Maximum	Minimum	Windstärke allein	N	E	Max. N / Max. E	Min. N / Min. E
I	6. 9. 7^h bis 8. 9. 7^h 1915	3	W–WNW	43	17	7	7	7	2	3
II	3. 8. 2^h bis 5. 8. 6^h 1915	4	W–WNW	40	16	7	9	7	4	4
III	30. 6. 7^h bis 4. 7. 7^h 1915	6	NNW–W	34	11	6	9½	10	3	4
	3 Fälle	13					8,5	8,0	3,0	3,7

(im Mittel = 4,3)

brachten Gradientstromes enthalten und, daß wenigstens ein großer Teil der Windpulsationen bei einigermaßen ruhiger Wetterlage auf solche Trägheitswellen zurückzuführen sind.

4. Trägheitsschwingungen in den Windregistrierungen des Höhenobservatoriums auf dem Sonnblick 3106 m.

Im theoretischen Teil ist nachgewiesen worden, daß bei unmittelbar einsetzenden oder sich allmählich entwickelnden Druckgradienten die Trägheitsschwingungen in der Höhe viel kräftiger zur Ausbildung gelangen und auch langsamer abklingen als in den unteren Atmosphärenschichten. Es läßt sich demnach vermuten, daß auf den Bergobservatorien Trägheitsschwingungen in den Windregistrierungen der Anemographen sich vielleicht deutlicher und öfter zeigen als in jenen der Niederungen. Um zu sehen, ob dies tatsächlich der Fall ist, wurden die Windregistrierungen auf dem Hohen Sonnblick (47° 03′ N, 12° 57′ E, 3106 m) daraufhin durchgesehen und in den ersten Monaten des Jahrgangs 1915 einige Fälle gefunden, deren nähere Analyse lohnte. Übrigens ließen sich auch hier die Fälle beliebig vermehren. Trägheitsschwingungen müßten in der Breite des Sonnblicks eine Periode von 16,33 Stunden zeigen; es wurden demnach nach Pulsationen von rund 16 Stunden Dauer gesucht. Wenn auch Schwankungen dieser Art sehr häufig auftraten, schien es doch, daß die Periode etwas kürzer, bei 14 Stunden oder etwas

Tabelle 9. Trägheitsschwingungen in den Wind-

Fall	Zeit von	Zeit bis	Zahl der Perioden	Extreme Windrichtung	Extreme der Windgeschwindigk. Maximum	Extreme der Windgeschwindigk. Minimum	Mittlere Schwankung (km/Std.) bei der N-Kompon.	Mittlere Schwankung (km/Std.) bei der E-Kompon.
Sonnblick I	26. 3. 15^h	bis 28. 3. 16^h 1915	3	W–SW	50	15	12,0	17,4
„ II	27. 4. 16^h	bis 30. 4. 10^h 1915	4	N–E	44	4	7,1	11,6
„ III	18. 2. 2^h	bis 20. 2. 3^h 1915	3	WNW–SW	65	6	22,2	30,2
„ IV	10. 2. 24^h	bis 14. 2. 10^h 1915	5	S–W	60	13	15,0	12,3
„ V	26. 2. 2^h	bis 28. 2. 19^h 1915	4	W–E	48	0	18,9	14,8
5 Fälle			19		53	7	15,0	17,3

(im Mittel = 3,8)

registrierungen von Wien (Hohe Warte) (Periode = 16,08 Std.).

Schwankung km/Std.			Harmonische Analyse				Amplituden-verhältnis	Phasen-unterschied	Phasen-unterschied	Anmerkungen
			Nord-komponente		Ost-komponente					
Windstärke	N	E	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase	Nord zu Ost	E–N	E–N gegen 90°	
6,0	7,7	5,8	2,8	193,2°	1,7	275,7°	1,65	82,5°	+ 7,5°	Windreduktion
9,8	9,4	9,6	2,9	195,4°	3,5	274,9°	0,83	79,5°	+10,5°	Windreduktion
4,0	2,7	3,4	0,9	130,6°	1,3	218,7°	0,69	88,1°	+ 1,9°	Windreduktion
	N : E = 1,06						1,06	83,4°	+ 6,6°	

länger, bei 20 Stunden war; gleichzeitig schien es, daß in dem Ausmaß der Schwankungen Schwebungen vorkommen, die nach S. 42 den Gedanken aufkommen ließen, ob nicht vielleicht hier eine Überlagerung mit anderen Pulsationen ähnlich langer Dauer vorliegen könnte.

In erster Linie ist in dieser Hinsicht an die auf Bergobservatorien sehr gut ausgebildete tägliche Windschwankung zu denken. Wir wissen von ihr, daß sie recht regelmäßig abläuft und namentlich in ihrem halbtägigen Glied in engster Beziehung zur halbtägigen Luftdruckwelle steht. Pulsationen, die sich der 16stündigen Trägheitsschwankung überlagern, hätten in diesem Fall entweder die Periode von 12 oder 24 Stunden. Bei gleicher Amplitude der Einzelwellen ergibt aber die Superposition der Wellen:

$$a \cos \frac{2\pi}{16{,}33} t + a \cos \frac{2\pi}{12} t = 2a \cos \frac{2\pi}{90{,}5} t \cos \frac{2\pi}{13{,}8} t \quad \text{und}$$

$$a \cos \frac{2\pi}{16{,}33} t + a \cos \frac{2\pi}{24} t = 2a \cos \frac{2\pi}{102{,}2} t \cos \frac{2\pi}{19{,}4} t,$$

also in dem einen Fall Wellen mit einer Periode von 13,8 Stunden und eine Schwebung alle 45,25 Stunden = 1,89 Tagen, in dem anderen Fall Wellen mit einer Periode von 19,4 Stunden und Schwebungen alle 2,13 Tagen.

Das gerade ist aber das, was wir in den Windregistrierungen des Sonnblicks gefunden haben. Es dürfte sich demnach empfehlen, hier auch die

registrierungen des Sonnblicks (3106 m) (Periode = 16,33 Std.).

Harmonische Analyse						Amplituden-Verhältnis N : E	Phasen-unterschied E–N	Bemerkung
Nordkomponente			Ostkomponente					
Mittelwert km/Std.	Amplitude	Phase	Mittelwert km/Std.	Amplitude	Phase			
+ 13,4	4,9	11,8°	+ 24,8	4,7	77,7°	1,04	65,9°	Windreduktion
— 10,7	2,8	165,5°	— 14,3	3,9	248,8°	0,72	83,3°	Windreduktion
+ 10,8	6,6	353,0°	+ 37,2	12,8	69,3°	0,52	76,3°	Windreduktion
+ 26,2	5,6	216,3°	+ 18,9	4,4	284,4°	1,28	68,1°	Windreduktion
— 18,9	8,2	86,5°	— 4,6	(1,6)	265,9°	(5,12) 1,28*)	82,9°	Windreduktion
						0,99	75,3°	

*) Verhältnis der mittleren Schwankung.

halbtägige und die ganztägige Windschwankung in den Bereich der Untersuchung zu ziehen.

Nach der früher dargelegten Methode wurden insgesamt 5 Fälle der Windregistrierungen auf dem Sonnblick eingehend analysiert. Sie fallen alle auf die Monate Februar, März und April 1915. Dieser Umstand hat nichts zu bedeuten; es waren dies die Monate, die mir zuerst gerade zur Verfügung standen. Die Ergebnisse der Analyse stehen in obiger Tabelle 9 in ähnlicher Zusammenstellung, wie die früheren auf S. 50 und 54.

Die mittlere Schwankung (Maximum-Minimum) ist bei dieser 16stündigen Welle sowohl bei der N- wie auch bei der E-Komponente recht bedeutend; der Größenordnung nach bei 15 km/Stunde. Dabei verteilen sich die Windgeschwindigkeiten auf alle Windrichtungen; in der Höhe scheint keine derselben für die Ausbildung solcher Schwingungen bevorzugt zu sein. Auch in den Werten der harmonischen Analyse ist die Amplitude noch recht ansehnlich, wenn sie auch, wie zu erwarten, den Wert der halben Schwankung nicht erreicht. Das Verhältnis der Amplituden N : E hat im Mittel den Wert 75,3° mit den Extremen 83 und 68°; er ist demnach gegenüber dem theoretischen Wert von 90° um etwa 15° zu niedrig, was gerade 40 Minuten in der Zeit bedeutet.

Die 5 untersuchten Fälle des Sonnblicks lassen demnach wohl auch den Schluß zu, daß Trägheitsschwingungen im Stromfeld der Höhe genau so vorhanden sind wie in den unteren Schichten. Dieser Schluß wird gestützt, wenn man nun zu dieser Welle aus den Beobachtungen die halb- und ganztägige Schwingung ermittelt und mit ihr in Beziehung setzt. Die Ergebnisse der harmonischen Analyse der beiden Wellen stehen für dieselben 5 Fälle in folgender Tab. 10.

Tabelle 10.

Ganz- und halbtägige Windperiode auf dem Sonnblick (3106 m).

Fall	Halbtägige Welle					Ganztägige Welle				
	Zahl der Perioden	Nordkomponente Amplitude km/Std.	Nordkomponente Zeit des Max.*)	Ostkomponente Amplitude km/Std.	Ostkomponente Zeit des Max.*)	Zahl der Perioden	Nordkomponente Amplitude km/Std.	Nordkomponente Zeit des Max.*)	Ostkomponente Amplitude km/Std.	Ostkomponente Zeit des Max.*)
Sonnblick I	4	3,2	1,6h	1,7	2,6h	2	4,6	18,6h	6,6	18,2h
„ II	5	3,3	1,1h	6,4	1,8h	2	0,8	19,3h	8,9	16,0h
„ III	4	2,5	22,2h	2,8	4,5h	2	8,4	9,0h	12,0	9,7h
„ IV	7	3,3	2,9h	3,7	5,55h	3	7,1	17,1h	7,2	15,5h
„ V	5	1,5	0,65h	4,5	23,36h	2	6,2	9,0h	6,1	20,6h
5 Fälle	25 (5)	2,78	0,9h	3,83	2,8h	11 (2)		14,6h	8,16	16,0h

*) Bezogen auf t = 0 in der Mitte zwischen 0 und 1h.

Die Zahl der für jeden Fall zur Verfügung stehenden Perioden ist bei der halbtägigen Welle etwa um eine Periode größer als bei der 16stündigen Welle. Die Zahl der 24stündigen Wellenperioden sinkt in jedem Fall auf 2 (nur einer hat drei). Das ist recht wenig, und deshalb ist es erstaunlich, daß diese wenigen Perioden sowohl bei der halb- wie auch bei der ganz-

tägigen Welle im Mittel doch ein Resultat geben, das mit den Ergebnissen der Reduktion langjähriger Registrierungen gut übereinstimmt.

Nach v. Hann (1903) folgt die halbtägige Periode der N- und E-Komponente des Windes auf den Berggipfeln mit großer Gesetzmäßigkeit den Gleichungen:

langjährige Mittel	5 Fälle des Sonnblicks
$N = 1{,}4 \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + 86{,}5^0\right)$	$N = 2{,}8 \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + 63^0\right)$
$E = 0{,}7 \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + 357{,}6^0\right)$	$E = 3{,}8 \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + 6^0\right)$.

Die langjährigen Mittel sind aus den entsprechenden Registrierungen des Sonnblicks, des Säntis und des Obirs abgeleitet. Unsere 25 Perioden ergeben die danebenstehenden Gleichungen. Die Übereinstimmung ist in den Phasen ausgezeichnet: bei der N-Komponente ergeben die 5 Fälle — 23,5°, d. i. 45 Minuten Verspätung des Maximums, bei der E-Komponente + 8,4, d. i. 17 Minuten Verfrühung des Maximums. Die Amplituden sind im langjährigen Mittel wesentlich kleiner, was aber durchaus zu erwarten ist, da die Zusammenlegung vieler Fälle immer ihre Schwankung reduziert. Wenn man die Einzelfälle ansieht, erkennt man, daß die Abweichungen natürlich größer werden aber doch nur in bescheidenem Maße. Man kann deshalb sagen, daß die halbtägige Windschwankung sich in diesen 5 Fällen durchaus normal verhalten hat.

Ähnlich verhält es sich auch bei der ganztägigen Welle. Die langjährigen Mittel ergeben nach v. Hann:

langjährige Mittel	5 Fälle des Sonnblicks
$N = 1{,}5 \left(\frac{2\pi}{24}t + 248{,}5^0\right)$	$N = 5{,}4 \sin\left(\frac{2\pi}{24}t + 241^0\right)$
$E = 1{,}3 \left(\frac{2\pi}{24}t + 104{,}5^0\right)$	$E = 8{,}2 \sin\left(\frac{2\pi}{24}t + 210^0\right)$.

Die 5 Fälle des Sonnblicks ergeben die danebenstehenden Werte. Die Übereinstimmung in der Phase der N-Komponente ist ausgezeichnet. Bei der E-Komponente ist der Unterschied — 105,5°. Dazu ist zu bemerken, daß obige langjährige Mittel ein Mittel für das ganze Jahr ist. Während sich aber bei der N-Komponente die ganztägige Periode das ganze Jahr hindurch in derselben Form erhält, kehrt sich der tägliche Gang der E-Komponente zwischen Winter und Sommer um. Nach 10jährigen Mittelwerten ergibt sich als Phase für den Januar 264,5°, für den Juli 95,4°. Unsere Fälle liegen im Februar bis April und die Phase 210° liegt zwischen dem Sommer- und dem Winterwert. Die Abweichung ist demnach verständlich. Übrigens schwanken bei der ganztägigen Welle die Werte der einzelnen Fälle immer beträchtlich um den Mittelwert herum. Auch dies ist verständlich, da man weiß, daß die ganztägige Schwankung des Windes ähnlich wie die ganztägige Luftdruckwelle in viel stärkerem Grade von den jeweiligen Witterungsverhältnissen abhängt als bei der halbtägigen Welle.

Trägheitsschwingungen, halbtägige und ganztägige Windwelle überlagern sich in unseren 5 Fällen und geben einen komplizierten Verlauf der Windpulsationen. Es läßt sich nun mit den bei der Analyse gefundenen Phasen die Superposition der drei Wellen in jedem Fall wieder berechnen, und den

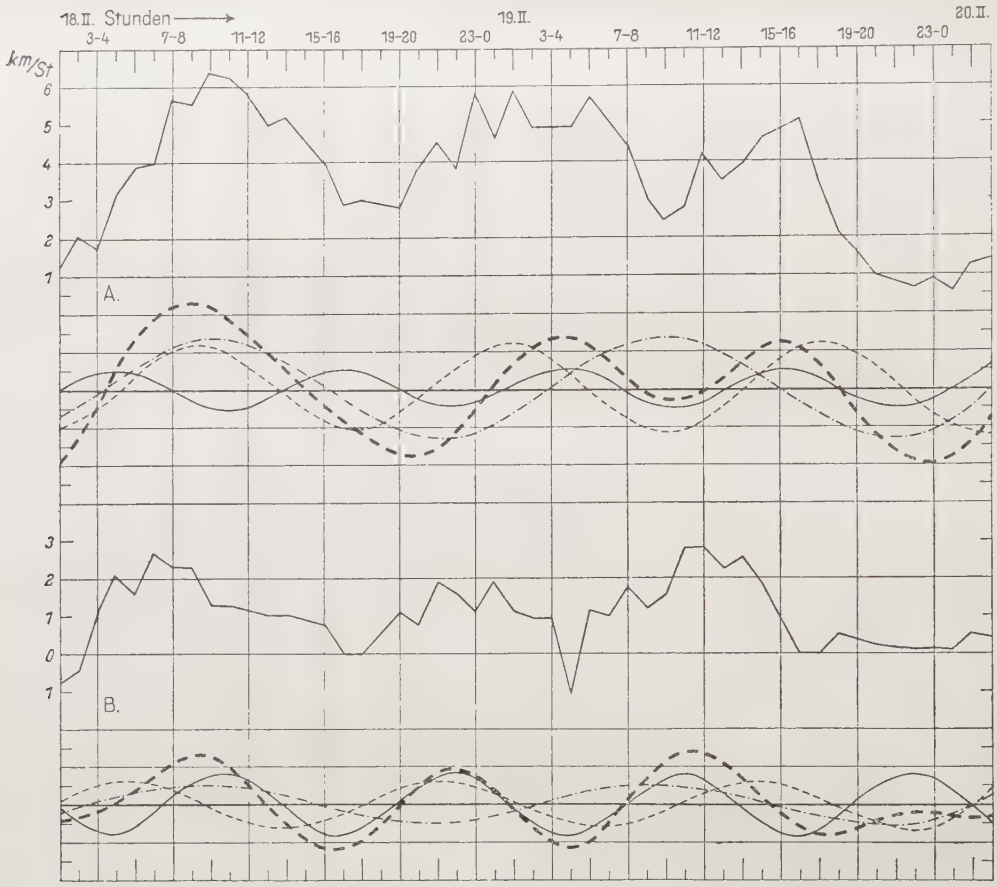

Abb. 16. Windregistrierungen auf dem Sonnblick 1915 (18. Febr. 1—2^h bis 20. Febr. 3—4^h).

A. Ostkomponente.

Kurvenzeichen	Periode in Stunden	Amplitude (km/St.)	Zeit des ersten Maximums
————	12	0,5	4,5^h
– – – – – –	16,5	1,2	8,8^h
– · – · – · –	24	1,3	9,7^h
– – – – – –	Überlagerung der drei Wellen		

B. Nordkomponente.

Kurvenzeichen	Periode in Stunden	Amplitude (km/St.)	Zeit des ersten Maximums
————	12	0,5	10,2^h
– – – – – –	16,5	0,6	21,8^h
– · – · – · –	24	0,5	9,0^h
– – – – – –	Überlagerung der drei Wellen		

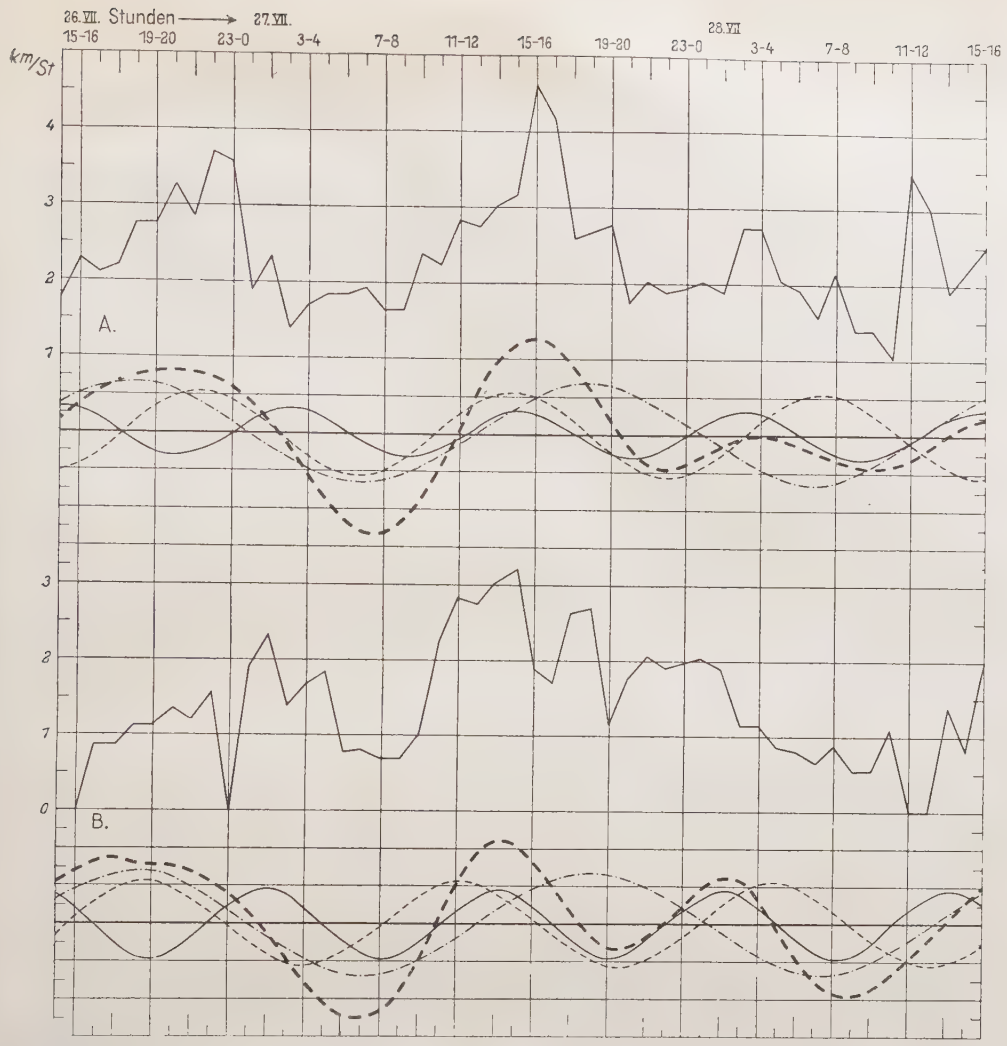

Abb. 17. Windregistrierungen auf dem Sonnblick 1915 (16. Juli 14—15^h bis 28. Juli 15—16^h).

A. Ostkomponente.

Kurvenzeichen	Periode in Stunden	Amplitude (km/St.)	Zeit des ersten Maximums
———	12	0,3	14,6^h
– – – – –	16,5	0,55	21,7^h
–·–·–·–	24	0,65	18,2^h
– – – – –	Überlagerung der drei Wellen		

B. Nordkomponente.

Kurvenzeichen	Periode in Stunden	Amplitude (km/St.)	Zeit des ersten Maximums
———	12	0,45	1,6^h
– – – – –	16,5	0,55	19,3^h
–·–·–·–	24	0,65	18,6^h
– – – – –	Überlagerung der drei Wellen		

so „theoretisch“ gewonnenen Verlauf mit dem beobachteten vergleichen. Man wollte sehen, bis zu welchem Grade die 3 Wellen die tatsächlichen Beobachtungen wiederzugeben imstande sind. Dieser Vergleich ist in allen 5 Fällen durchgeführt worden und das Ergebnis kann als wirklich gut bezeichnet werden. Bis auf einen mehr oder weniger unperiodischen Anteil sind alle Schwankungen durch die drei Wellen in der Amplitude wie auch in der Phase richtig erfaßt worden. Zwei Fälle mögen dies bestätigen. Die Abb. 16 gibt die N- und E-Komponente für den Fall Sonnblick III vom 18. bis 20. Febr. 1915. Die obere Kurve gibt den Verlauf nach den Beobachtungen; darunter ist die Superposition der drei Wellen gegeben, die auf die durchgezogene Linie in der oberen Kurve gesetzt, die gestrichelte Kurve ergibt. Sie folgt, wie man sieht, allen Schwankungen der Komponenten in ausgezeichneter Weise. Aber nur mit Berücksichtigung der Trägheitsschwingungen ist, wie man sich leicht überzeugen kann, die Übereinstimmung zustande gekommen. Sie ist somit ein integrierender Bestandteil der Windschwankungen in der betrachteten Zeit.

Der zweite Fall, den ich wiedergeben möchte, ist der Fall Sonnblick I vom 26. bis 28. März 1915. Die Abb. 17 ist genau so zu deuten wie die vorhergehende. Hier ist es die N-Komponente, die während der Zeit eine längerdauernde unperiodische Änderung aufwies. Sonst gibt die Superposition die Schwankungen des Windes recht gut wieder und abermals ist die Übereinstimmung ein Resultat der Mitberücksichtigung der Trägheitsschwankung.

Wir können zusammenfassend feststellen, daß die Trägheitsschwingung einen wesentlichen Bestandteil der kürzeren Pulsationen der Windrichtung und der Windstärke auch in der Höhe darstellen und daß viele dieser Schwankungen nur durch sie allein eine Erklärung finden.

5. Das Auftreten von Trägheitsschwingungen und die Wetterlage.

Die Auswahl der in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Fälle aus den Windregistrierungen der betreffenden meteorologischen Observatorien erfolgte aus der Überlegung heraus, daß sich Trägheitsschwingungen am ehesten dort finden könnten, wo eine längere Zeit hindurch die Windströmungen eine gewisse Beständigkeit in der Richtung und Stärke aufweisen. Einer mehr oder minder konstanten Luftströmung wären dann die Trägheitsschwingungen als Pulsationen der Richtung und Stärke überlagert. Zum Finden dieser Fälle erwies sich diese Methode als durchaus praktisch. Bei ihr tritt in keiner Weise irgendwie die Wetterlage in Erscheinung, bei der solche Trägheitsschwingungen etwa begünstigt werden. Es wurde auch in keiner Weise auf die Letztere Rücksicht genommen.

Es hat aber sicherlich ein Interesse zu sehen, inwiefern vielleicht eine Beziehung der behandelten Fälle zu der allgemeinen Wetterlage, d. i. zum allgemeinen Druckfeld und Stromfeld, besteht. Da die Fälle nach dem Vorhandensein einer gewissen Beständigkeit in der Richtung und Stärke des Windes an einer Station ausgesucht wurden, ist es von vornherein zu erwarten, daß auch die Wetterlage dieser Fälle eine ähnliche Beständigkeit aufweisen müßte, d. h. es war wohl zu erwarten, daß die Station mit Träg-

heitsschwingungen im Bereiche eines breiten Luftstromes liegen würde, wie er sich in der Übergangszone zwischen ausgedehnten Hoch- und Tiefdruckgebieten auszubilden pflegt. Die Durchsicht der Wetterkarten dieser Tage, an denen an den Stationen Potsdam, Wien oder Sonnblick Trägheitsschwingungen auftraten, bestätigte in vollem Maße diese Schlußfolgerung. In den meisten Fällen ist es so, daß die Trägheitsschwingungen im Grenzgebiet eines ausgedehnten Hoch- und Tiefdruckgebietes sich ausbildeten und so lange erhalten blieben, wie sich der breite Luftstrom in dieser Zone hielt.

Die Durchsicht der Wetterkarten der Vortage vor Beginn der analysierten Trägheitswellen zeigt nun in auffallender Weise, daß dieser Beginn in den meisten Fällen mit einer auffälligen, raschen Änderung der Druckgradienten im Bereich der Station Hand in Hand ging, so daß die Vermutung nicht von der Hand zu weisen ist, daß diese Änderungen der Druckgradienten die Ursache für das Auftreten der Trägheitsschwingungen in den Luftströmungen sein könnten. Wir wissen ja aus den theoretischen Überlegungen in den früheren Abschnitten, daß bei plötzlich oder rasch auftretenden Störungen des Gleichgewichts zwischen Druck- und Stromfeld die Einstellung in das neue Gleichgewicht von Trägheitsschwankungen um das Letztere begleitet sein muß, und wir haben an Beispielen gesehen, wie z. B. das unvermittelte oder allmähliche Einsetzen eines Druckgradienten bei vorheriger Ruhe (Druckgradient = 0) Trägheitsschwingungen auslöst. Um diesen aus den Wetterkarten gefundenen Zusammenhang auch zahlenmäßig zu belegen, wurde für die einzelnen Fälle aus den Wetterkarten der deutschen Seewarte (7-Uhr-Termin) in der Richtung des maximalen Druckgradienten an der Station mit Trägheitswellen für zwei Tage vor und für mehrere Tage nach, sowie für den Tag des Beginns der analysierten Wellen die Druckdifferenz zweier passend gelegener Stationen gebildet und diese Differenzen als ein Maß für den Druckgradienten im Bereiche der Station angesehen. Für zwölf Fälle ist in der folgenden Tabelle die Zusammenstellung dieser Differenzen gegeben. Hierbei wurden die Differenzen immer in der Richtung genommen, daß in allen Fällen der Gang der Änderung der Druckgradienten derselbe ist. Es sind somit die Fälle der Gradientverstärkung und diejenigen mit Gradientabschwächung zusammengelegt worden, um für alle Fälle auch einen Mittelwert geben zu können.

In ganz klarer Weise zeigt die Tab. 11, daß in nahezu allen Fällen die größte Änderung des Druckgradienten, und zwar in ganz beträchtlichem Maße in der Zeit vom Vortag zum Tage des Beginns der Trägheitsschwingungen erfolgt. Wenn man bedenkt, daß für die Wahl der behandelten Fälle immer maßgebend war, daß die Trägheitsperiode sich schon deutlich in den Windregistrierungen zeigte, und sie vielleicht schon in ein oder zwei Perioden vorher, wenn auch erst in Entwicklung vorhanden gewesen ist, so ist die Klarheit, mit der die Tabelle dieses Ergebnis wiedergibt, beachtenswert. Es sind in den Einzelfällen einige vorhanden, die besonders charakteristisch sind; in den Fällen Potsdam VIII, IX, X und XI ändert sich das Druckgefälle vom Vortage zum Haupttag im Mittel um 17,6 mbar, während vorher und nachher die Änderung nur gering ist. Sogar im Mittel aller Fälle ist die Änderung des Druckgefälles vom Vortag zum Haupttag fast 9 mbar,

Tabelle 11.

Druckgradient vor und nach der Trägheitsschwingung (in mbar).

Fall	Zeit	Stationen	Druckunterschiede				
			2. Vortag	1. Vortag	Haupttag	1. Nachtag	2. Nachtag
Potsdam I	12.–15. 2. 1933	Königsberg–Frankf. a. M.	—10,3	— 3,3	+ 5,7	+ **9,5**	+ 8,5
„ III	23.–26. 1. 1933	Stettin–München	— 0,7	+ 1,2	+ 5,8	+10,6	+**12,5**
„ IV	4.– 5. 3. 1932	Essen–Warschau	—19,3	—14,4	— 5,6	— **5,1**	— 7,2
„ V	25.–29. 1. 1932	Frankfurt a. M.–Stettin	— 0,9	— 5,3	+ 2,4	+ 1,7	+ **3,9**
„ VII	25.–26. 6. 1910	Swinemünde–München	— 6,7	—12,1	— **4,0**	— 6,7	— 8,0
„ VIII	6.–10. 6. 1911	Aachen–München	— 2,0	+ 2,8	+ **16,7**	+16,4	+10,4
„ IX	28.–30. 6. 1910	Breslau–Hamburg	+ 7,2	+ 3,2	+ **10,2**	+ 8,8	+ 7,6
„ X	8.–10. 4. 1909	Frankfurt a. M.–Neufahrwasser	+ 5,3	+ 6,3	+ **14,6**	+ 5,5	+ 2,7
„ XI	15.–17. 2. 1909	Frankfurt a. M.–Neufahrwasser	+ 3,3	+ 6,9	+ **28,8**	+16,4	+12,5
„ XII	12.–13. 7. 1909	Frankfurt a. M.–Neufahrwasser	+ 8,9	+ 8,1	+ 14,0	+**16,1**	+ 8,1
Wien I	6.– 8. 9. 1915	München–Budapest	— 3,3	+ 6,0	+ **13,1**	+ 4,1	+ 5,0
„ II	3.– 5. 8. 1915	München–Budapest	— 0,3	— 1,9	+ 3,6	+ **7,3**	+ 3,7
„ III	30. 6.–4. 7. 1915	Bamberg–Budapest	+ 5,7	+ 5,5	+ 8,9	+**12,1**	+ 4,4
13 Fälle			—13,1	+ 3,0	+**114,2**	+96,7	+64,1
		Mittel:	—1,01	+ 0,23	+ **8,79**	+ 7,44	+ 4,93
		mittlere Änderung des Druckgradienten:	+ 1,24		+ **8,56**	— 1,35	— 2,51

während sie vorher und nachher von der Größenordnung 1—2 mbar ist. Dieses Resultat beweist in klarer Weise, daß das Auftreten starker Druckgefälle bzw. das Abklingen bestehender starker Druckgradienten in den breiten Luftströmungen zu Trägheitsschwingungen Veranlassung gibt, genau so wie sie theoretisch zu erwarten sind.

Die Fälle Potsdam II und VI sind in obiger Tabelle nicht enthalten. Bei Potsdam II zeigen die Wetterkarten eine sehr unruhige Drucklage, bei der rasche Änderungen der Druckgradienten mehrfach vorkommen. So ändert sich vom Vortag zum Haupttag in Königsberg der Luftdruck um 9 mbar, in Frankfurt a. M. um 13 mbar; aber auch während des Falles selbst traten erhebliche, wenn auch nicht so große Änderungen auf. Ähnlich ist auch der Fall VI. Hier ändert sich z. B. in Hamburg vom 2. Vortag zum 1. Vortag und zum Haupttag der Druck um + 14 bzw. — 8 mbar. Die Änderungen sind konträr und die Unruhe in der Druckverteilung ist beträchtlich. Die Fälle fallen nicht aus der Regel heraus, aber sie eignen sich nicht zur Mittelbildung.

Als ich die Wetterkarten des 25. Okt. 1911, die im gebundenen Monatsheft der Bibliothek des preußischen meteorologischen Instituts der Universität Berlin vorhanden sind und die den Haupttag des Falles Potsdam VI enthalten, heraussuchte, war ich erstaunt, zu sehen, daß ein Unbekannter in dem Druckfeld des Tiefdruckgebietes mit dem Zentrum über der Nordsee wellenförmige Isobaren nachträglich eingezeichnet hatte, die vielleicht Beziehungen zu den Trägheitswellen haben könnten. Ich will diese interessante Wetterkarte in Abb. 18 wiedergeben. Wenn diese Isobarenwellen, denen natürlich eben-

solche wellenförmigen Stromlinien entsprechen, Andeutungen von Trägheitswellen im Stromfeld sind, so hätten diese Wellen im Gebiete von Mitteleuropa eine Länge von ungefähr 500 km; sie würden aber mit Annäherung an das Zentrum der Zyklone der Länge nach kleiner werden. Ihre Periode

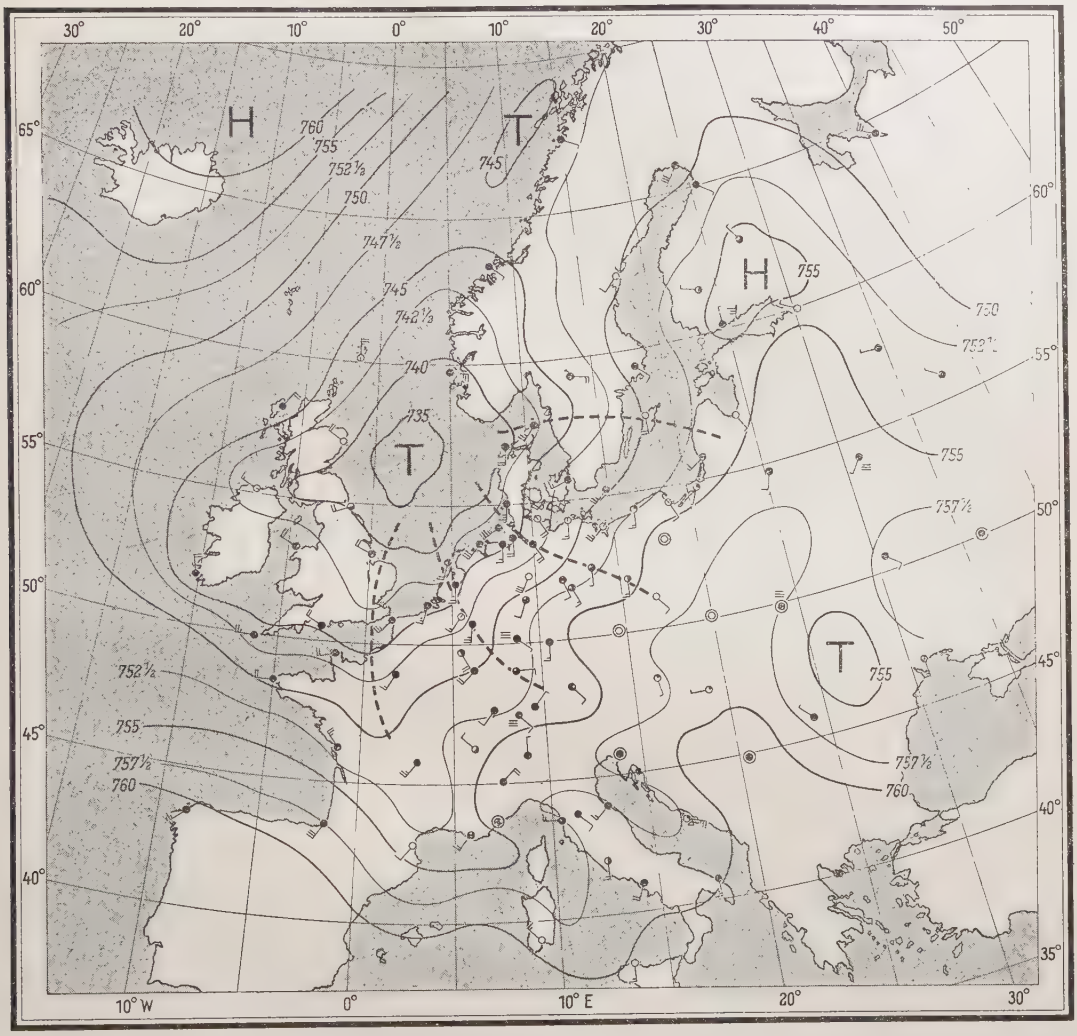

Abb. 18. Wetterkarte des 25. Okt. 1911, 7h a.

zu 16 Stunden angenommen, ergibt eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben von 31 km/Std. = etwa 9 m/sec, ein Wert, der nicht unwahrscheinlich sein dürfte.

Auch die Fälle des Sonnblicks schließen sich nicht aus den bisherigen Ergebnissen aus. Um sie eingehend zu behandeln, wären Druckkarten für das Niveau von 3000 m erforderlich; solche liegen aber nicht vor. Aber

man könnte auch aus den Karten für das Meeresniveau ersehen, wo und wann die größten Änderungen im Druckfeld sich ereignet haben. Für das Gebiet des Sonnblicks sind jene Änderungen maßgebend, die knapp nördlich oder südlich der Alpen stattgefunden haben. Im Falle Sonnblick I erfolgte vom Vor- zum Haupttag ein Druckfall von 12½ mbar südlich der Alpen (Triest), während in München ein solcher von 11 mbar sich erst am nächsten Tage einstellte. Im Fall III erfolgte in München vom Vor- zum Haupttag ein Druckfall von 13 mbar, während südlich der Alpen der Druckfall von 10½ mbar erst am nächsten Tage vorhanden ist. Die Fälle VI und V verhalten sich ähnlich. Im ersteren erfolgte in München vom Vor- zum Haupttag ein Druckfall von 17 mbar, im letzteren ein Druckanstieg von 11 mbar. Diese raschen Änderungen des Druckgefälles sind wohl auch in diesen Fällen die Ursache für die Ausbildung der Trägheitsschwingungen in der Höhe.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die untersuchten Fälle mit Trägheitsschwingungen an das Auftreten rascher, kräftiger Änderungen der Druckgradienten in der Umgebung der Station geknüpft sind, und diese Änderungen im Druckfeld wohl als Ursache für die Ausbildung von Trägheitsschwingungen in der Atmosphäre angesehen werden können.

VIII. ZUSAMMENFASSUNG.

Aus der ganzen Untersuchung ersieht man, welchen ausschlaggebenden Einfluß die Trägheitsschwingungen sowohl in der Dynamik der Atmosphäre wie auch in der Dynamik der Wasserhülle haben. Der Nachweis der periodischen Trägheitswellen im Meer dürfte an Hand der besprochenen Fälle eindeutig erbracht sein, und es ist festzustellen, daß auch in der Atmosphäre die Trägheitsbewegungen, soweit die Beobachtungen die Feststellungen zulassen, durchaus gegenüber den Gezeitenwellen und anderen durch Druckänderungen erzwungene Windschwankungen keine untergeordnete, sondern eher eine hervortretende Rolle spielen. Über das horizontale Ausmaß dieser sicher langwelligen Bewegungen läßt sich zunächst nichts Sicheres aussagen; trotzdem kann man vermuten, daß sie bei der Entwicklung einer Wetterlage ausschlaggebend mitwirken. Man könnte sich vorstellen, daß die mit den Trägheitsschwingungen verknüpften periodischen Windschwankungen den Anstoß zur Einwirbelung der Luftmassen bei der Zyklonen- und Antizyklonenbildung geben; dies wird besonders dann der Fall sein, wenn zwei breite Luftströmungen verschiedenen aerologischen Aufbaues aneinander vorbeigleiten und dann in einer Luftmasse Trägheitsschwingungen auftreten.

In den theoretischen Kapiteln sind neben den bekannten grundlegenden Betrachtungen solcher Trägheitsbewegungen periodische Bewegungen mit der Trägheitsperiode für den Ozean und für die Atmosphäre gesucht worden, die sich nach den vorgegebenen Annahmen in verschiedene Fälle gliedern. Wenn man von den Fällen mit einem veränderlichen virtuellen Reibungskoeffizienten absieht, ist das Problem von den einfachsten Wellen in einem stationären Grundstrom bis zu den verwickelten Fällen mit Reibung und Berücksichtigung der ablenkenden Kraft der Erdrotation behandelt worden. Insbesondere sind die Fälle ausführlich untersucht worden, bei denen die

Ausbildung eines Trift- oder Gradientstromes im homogenen Meer oder eines Gradientwindes in der Atmosphäre bei unvermittelt oder allmählich sich einstellendem Windeinfluß bzw. Druckgradient aus dem Zustand der Ruhe erfolgt. In jedem Fall geschieht dies mit abklingenden Trägheitsschwingungen um den schließlichen stationären Zustand. Einige bestimmte Beispiele wurden rechnerisch verfolgt. Alle diese Fälle lassen den Schluß zu, daß Trägheitsschwingungen in den Luft- und Meeresströmungen nichts Ungewöhnliches sein können und daß ihr Auftreten im Ozean und in der Atmosphäre jederzeit zu erwarten ist.

Das große Registriermaterial der Anemographen ist bisher überhaupt nicht herangezogen worden, um einen Nachweis des Vorhandenseins von Trägheitsschwingungen zu erbringen. Es konnte gezeigt werden, daß in den Windregistrierungen von Potsdam und Wien ohne großes Suchen Fälle ausgesprochener Windschwankungen in Richtung und Stärke gefunden werden können, die die charakteristischen Eigenschaften reiner Trägheitsschwingungen aufweisen. Auch in den Windregistrierungen des Höhenobservatoriums auf dem Sonnblick zeigen sich solche periodischen Schwankungen mit dem Charakter reiner Trägheitsschwingungen. Sie sind hier so kräftig entwickelt, daß eine Deutung der unregelmäßigen Schwankungen in der Richtung und Stärke der Winde nur gelingt, wenn zu den in der Höhe stärkeren ganz- und halbtägigen Windschwankungen, die mit dem täglichen Luftdruckgang in Beziehung stehen, auch die Trägheitswelle hinzukommt. Bei der zur Bearbeitung benutzten kleinen Zahl der Jahrgänge der Windbeobachtungen ist die Tatsache, daß oft 3—4 Fälle im Zeitraum weniger Tage ermittelt wurden, erstaunlich und zeigt wieder in klarer Weise, welche wichtige Erscheinung die Trägheitsschwankung auch für die Atmosphäre darstellt.

Daher ist es auch erklärlich, daß der am Schluß der Arbeit untersuchte Zusammenhang der bearbeiteten Fälle mit der Wetterlage zu dem eindeutigen Ergebnis geführt hat, daß immer eine starke und rasche Änderung der Druckgradienten in einem breiten Luftstrom Trägheitsschwingungen auslöst, die sich längere Zeit darin erhalten und durch Reibung dann allmählich erlöschen.

LITERATURVERZEICHNIS.

1. V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg und T. Bergeron, Physikalische Hydrodynamik. Berlin 1933.
2. H. Solberg, Über freie Schwingungen einer homogenen Flüssigkeitsschicht auf der rotierenden Erde. I. Astrophys. Norvegica, Vol. 1, Nr. 7, Oslo 1936.
3. V. Bjerknes und H. Solberg, Zellulare Trägheitswellen und Turbulenz. Avh. norske Vidensk. Akad. Oslo, math.-nat. Kl., Nr. 7, 1929.
4. A. Defant, Gezeiten und innere Gezeitenwellen im Atlantischen Ozean. Erg. d. D. Atl.-Exp. „Meteor", Bd. VII, Berlin 1929.
5. J. E. Fjeldstad, Contribution to the dynamics of free progressive tidal waves. Sci. Res. of Norv. North polar Exp. „Maud" 1918—1925, Vol. IV, Nr. 3, Bergen 1929, S. 15.
6. H. Solberg, Integration der atmosphärischen Störungsgleichungen. I. Geofys. Publ., Vol. V, Nr. 9, Oslo 1928.
7. V. W. Ekman, On the influence of earth-rotation on ocean-currents. Arch. för Math. Astr. och Fys., Bd. 2, Nr. 11, 1905.
8. J. E. Fjeldstad, Ein Problem aus der Windtheorie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 10, 1930, S. 121.
9. K. Hidaka, Non stationary ocean-currents. Part I. Mem. Imp. Mar. Obs. Kobe, Vol. V, Nr. 3, 1933.
10. T. Nomitsu, A theory of the rising stage of trift-currents in ocean. Mem. Col. of Science Kyoto Univ. S.A., Vol. XVI, Nr. 2, 1933.
11. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik. Bd. I u. II, Braunschweig, 4. Aufl., 1900 u. 1901.
12. V. W. Ekman und B. Helland-Hansen, Measurement of ocean-currents. (Experiments in the North-Atlantic.) Kgl. Fysiogr. Sällsk. förh. Lund, Bd. 1, Nr. 1, 1931.
13. V. W. Ekman, Ergebnisse und Probleme zur Theorie der Konvektionsströme im Meer. Erg. d. kosm. Phys., Bd. IV, Leipzig 1939.
14. T. Gustafson und B. Kullenberg, Trägheitsströmungen in der Ostsee. Göteborgs kgl. Vetenskap Handl., Ser. B, Bd. 3, Nr. 6, 1933.
15. T. Gustafson und B. Kullenberg, Untersuchungen über Trägheitsströmungen in der Ostsee. Svens. hydr.-biol. Komm. Skrif., Neue Serie XIII, Lund 1933.
16. A. Defant und B. Helland-Hansen, Bericht über die ozeanographischen Untersuchungen im zentralen und östlichen Teil des nordatlantischen Ozeans im Frühsommer 1938. Abh. d. preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Kl., Nr. 5, 1939.
17. F. M. Exner, Über oszillierende Strömungen im Wasser und Luft. Ann. d. Hydrogr. u. mar. Meteorologie, 1919, S. 155.
18. J. W. Sandström, On the relation between atmospheric pressure and wind. Kungl. Svens. Vet. Akad. Handl., Bd. 45, Nr. 10, 1910, oder Bull. Mt. Weather Obs., Vol. III, Part 5.
19. J. Hann, Über eine doppelte tägliche Periode der Windkomponenten auf Berggipfeln. Meteorol. Zeitschr., 1903, S. 301.
20. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam 1932 und 1933. Veröffentl. d. Reichsamtes f. Wetterdienst, Nr. 407 u. 408, Berlin 1935.
21. Jahrbuch der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien, Jahrg. 1915, Neue Folge, Bd. 52, Wien 1919.

LEBENSLAUF

Ich bin am 14. April 1914 als Sohn des Universitätsprofessors Dr. Albert Defant in Wien geboren. Das Gymnasium absolvierte ich von 1925 bis 1927 am Bundesrealgymnasium in Innsbruck, von 1927 bis 1934 am Bismarckgymnasium in Berlin-Wilmersdorf, wo ich März 1934 die Reifeprüfung bestand. Anschließend genügte ich Mai bis Oktober 1934 in Neustadt a. d. Dosse meiner halbjährigen Arbeitsdienstpflicht und immatrikulierte mich Herbst 1934 an der Universität Berlin, um Geophysik zu studieren. Von Oktober 1935 bis Herbst 1937 erledigte ich meine militärische Dienstpflicht beim Art.-Regt. 23, Potsdam. Hierauf setzte ich mein Studium an der Universität Berlin bis Sommersemester 1939 fort. Mai bis Juli 1938 habe ich als wissenschaftliche Hilfskraft an der internationalen Golfstromexpedition auf dem Forschungsschiff „Altair" teilgenommen und war dann an der Auswertung der Ergebnisse beteiligt. Nach einer Reserveoffizierübung August 1939 rückte ich bei Ausbruch des Krieges ein und nahm an dem Polenfeldzug teil. Nach Beendigung desselben kam ich an die Westfront, wo ich bis zu meiner Einziehung zum Marinewetterdienst Anfang Februar blieb. Am 30. Januar 1940 wurde ich zum Leutnant befördert.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren E. Schmidt, Bartels, Defant, Kohlhörster, Wüst, Hennig, Stumpf, Knoch, Robitsch, Wehnelt, Dr. Ertel und Dr. Zistler.

Fritz Defant.